

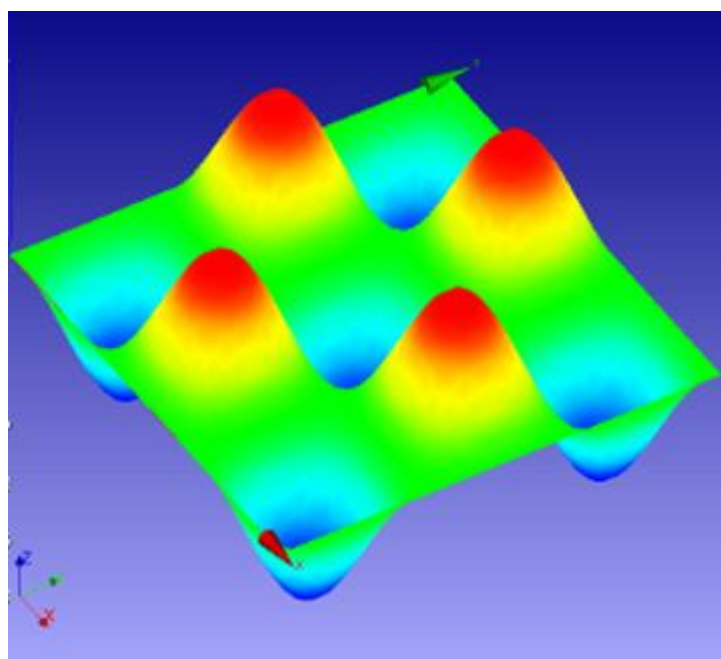


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

## Λυγισμός Πλακών από Σύνθετα Υλικά υπό Ορθή και Διατμητική Καταπόνηση



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Σ. Καραβάκης

Επιβλέπων: Ιωάννης Ραυτογιάννης

Αθήνα, Ιούλιος 2016

ΕΜΚ ΔΕ 2016/11



Καραβάκης Ν. Σ. (2016).  
Λυγισμός πλακών από σύνθετα υλικά υπό ορθή και διατμητική καταπόνηση  
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2016/11  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Karavakis N. S. (2016).  
Buckling of FRP composite plates under normal and shear loading  
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2016/11  
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece



# Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη .....	3
Abstract .....	5
Ευχαριστίες .....	7
1  Ινοπλισμένα Σύνθετα Υλικά (FRPs) .....	9
1.1  Σύνθετα Υλικά.....	9
1.2  Ινοπλισμένα Πολυμερή .....	9
1.3  Συμμετρικές Διαστρωματώσεις.....	10
1.4  Μητρώα Δυσκαμψίας Διαστρωματώσεων .....	11
2  Θεωρία Λεπτών Πλακών – Συμμετρικές Διαστρωματώσεις.....	16
2.1  Γενικές Εξισώσεις Ελαστικής Ενέργειας .....	16
2.2  Κάμψη Απλά Εδραζόμενων Ορθογωνικών Πλακών .....	17
2.3  Λυγισμός Απλά Εδραζόμενων Ορθογωνικών Πλακών.....	22
3  Ανάλυση Φορέων από Σύνθετα Υλικά μέσω της Γλώσσας Προγραμματισμού MATLAB .....	29
3.1  Περιγραφή Προβλήματος.....	29
3.2  Διαδικασία Επίλυσης Προβλήματος .....	32
3.3  Το Μαθηματικό-Προγραμματιστικό Εργαλείο MATLAB .....	33
3.4  Παραδείγματα.....	47
4  Επεξεργασία και Ανάλυση των Αποτελεσμάτων .....	56
4.1  Γενικά.....	56
4.2  Συνδυασμός Θλιπτικών και Διατμητικών Τάσεων .....	57
4.3  Θλιπτικές Τάσεις μόνο κατά τη Διεύθυνση $x$ .....	66
4.4  Θλιπτικές Τάσεις ταυτόχρονα κατά τη διεύθυνση $x$ και $y$ .....	72
5  Συμπεράσματα.....	78
Βιβλιογραφία.....	83
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB .....	84



**Λυγισμός Πλακών από Σύνθετα Υλικά υπό  
Ορθή και Διατμητική Καταπόνηση**  
Καραβάκης Ν. Σ. (Επιβλέπων: Ραυτογιάννης Ι.)

**Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς πλακών από σύνθετα υλικά έναντι λυγισμού σε συνθήκες καθαρής διάτμησης, καθαρής θλίψης σε μία και δύο διευθύνσεις αλλά και διαφόρους συνδυασμούς ορθών και διατμητικών τάσεων. Οι πλάκες ήταν απλά εδραζόμενες, ορθογωνικές με συμμετρικές διαστρωματώσεις αλλά διαφορετικό κώδικα διαστρωμάτωσης η καθεμία. Βασική επιδίωξη ήταν η εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ως προς τις διαφορετικές διαστάσεις και φορτίσεις που επιβάλλονταν στις πλάκες κάθε φορά. Για το λόγο αυτό και με βάση τη γραμμική ελαστική θεωρία λυγισμού αναπτύχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB με τελικό σκοπό τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα ινοπλισμένα σύνθετα υλικά και παρουσιάζονται οι βασικές σχέσεις που τα διέπουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται μια εισαγωγή στη θεωρία λεπτών πλακών και παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις που διέπουν την κάμψη και το λυγισμό συμμετρικών διαστρωματώσεων από σύνθετα υλικά. Το φαινόμενο αυτό του λυγισμού εμφανίζεται σε στοιχεία που καταπονούνται από θλιπτικό φορτίο, για το οποίο υπάρχει τιμή όπου αν ξεπεραστεί οδηγεί πλέον σε παραμορφώσεις εκτός του επιπέδου του. Αυτή λοιπόν η τιμή αναζητείται, η οποία αποτελεί και την κρίσιμη τιμή.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά το πρόβλημα το οποίο επιλύεται, οι εξισώσεις που το διέπουν και τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την ανάπτυξη του κώδικα. Επίσης παρουσιάζονται κάποιες βασικές εντολές του MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν αλλά και συγκεκριμένα παραδείγματα που επιλύθηκαν και συνετέλεσαν στη συγγραφή του κώδικα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά μέσω διαγραμμάτων τα αποτελέσματα που ελήφθησαν μέσω του κώδικα που αναπτύχθηκε .

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από όλες τις ανωτέρω αναλύσεις.





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS  
EMK ΔΕ 2016/11

## **Buckling of FRP composite plates under normal and shear loading**

Karavakis N. S. (supervised by Raftoyiannis I.)

### **Abstract**

The purpose of this diploma thesis is the behavior analysis of FRP composite plates against buckling, under the conditions of pure shear, pure compression along one and two directions and various combinations of them. The plates were rectangular, simply-supported with symmetrical layups but each with different lamination code. The main objective was the finding of the critical buckling load as a function of the plates' dimensions and imposed loadings. As a result, based on the linear buckling theory a code has been developed in MATLAB programming language for the computation of the critical buckling load.

The first chapter is an introduction to the fiber-reinforced polymers, where the basic relationships that characterize them are presented.

The second chapter is an attempt to introduce the theory of thin plates, where there is a presentation of the equations describing bending and buckling of symmetrical laminations made of composite materials. The buckling phenomenon appears at elements under compressive loading. When the load exceeds a certain value, then out-of-plane deformations begin to take place. As part of this diploma thesis we seek this certain value of the compressive load, which is the critical buckling load.

The third chapter deals with the analytical presentation of the problem being solved, the equations that define it and the steps followed for the development of the MATLAB code. Furthermore some basic commands of MATLAB that were used are presented, as well as certain examples solved that contributed to the writing of the code.

The fourth chapter continues with the thorough presentation of the results extracted from the MATLAB code in the form of diagrams.

The fifth chapter includes the conclusions that arose from all the above analyses of the plates.



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Ιωάννη Ραυτογιάννη, ο οποίος ήταν εκείνος που μου υπέδειξε το θέμα της διπλωματικής εργασίας. Χωρίς τη συνεχή καθοδήγησή του, τις γνώσεις που μου μετέδωσε και τις συμβουλές του, καθώς και το χρόνο που αφιέρωσε για την επίλυση των αποριών και των προβλημάτων που προέκυψαν, η πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήταν ανέφικτη.

Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και στους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξή τους, όχι μόνο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Νικόλαος Καραβάκης

Αθήνα, Ιούλιος 2016



# **1 Ινοπλισμένα Σύνθετα Υλικά (FRPs)**

## **1.1 Σύνθετα Υλικά**

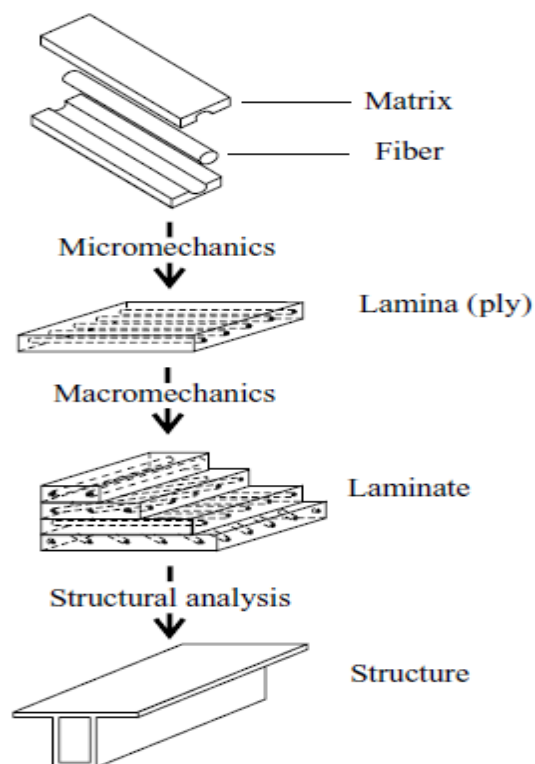
Δύο ή περισσότερα υλικά, τα οποία υπό διακριτή μορφή συνεργάζονται ενώ έχουν σημαντικές διαφορές στις φυσικές και μηχανικές τους ιδιότητες, δημιουργούν τελικά ένα νέο υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Το υλικό αυτό ονομάζεται σύνθετο υλικό. Η ολοένα και μεγαλύτερη χρήση των σύνθετων υλικών σε πολλές περιοχές του μηχανικού, όπως η ναυπηγική, η αεροδιαστημική μηχανική, έχει συμβάλει στην ανάδειξή τους και στην μεγάλη ανάπτυξη τους με αποτέλεσμα να αυξάνεται η καθημερινή εφαρμογή τους.

## **1.2 Ινοπλισμένα Πολυμερή**

Τα ινοπλισμένα πολυμερή αποτελούνται από ίνες ενσωματωμένες σε ένα μητρώο. Το μητρώο είναι το συνδετικό υλικό που συγκρατεί τις ίνες στην προβλεπόμενη διαταξη. Οι ίνες μπορεί να βρίσκονται σε μία ή πολλαπλές κατευθύνσεις, να είναι κοντές ή μακριές, συνεχείς ή ασυνεχείς. Τα πλεονεκτήματα που έχουν τα ινοπλισμένα πολυμερή είναι μεταξύ άλλων η υψηλή αντοχή, χαμηλό βάρος και καλή αντοχή σε κόπωση και διάβρωση. Έτσι “κερδίζουν” στη σύγκριση με τα συμβατικά ισότροπα υλικά, όπως ο χάλυβας και το αλουμίνιο.

Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών επιτυγχάνονται λόγω των χαρακτηριστικών των ινών και του συνδετικού υλικού. Στα χαμηλής απόδοσης σύνθετα υλικά ο οπλισμός με τη μορφή ινών προσδίδει κάποια δυσκαμψία, αλλά πολύ λίγη αντοχή ενώ το φορτίο φέρεται κυρίως από το συνδετικό υλικό. Αντίθετα στα υψηλής απόδοσης σύνθετα υλικά οι συνεχείς ίνες προσδίδουν την επιθυμούμενη αντοχή και δυσκαμψία, ενώ το συνδετικό υλικό προσφέρει υποστήριξη και προστασία στις ίνες. Κυρίως όμως το συνδετικό υλικό βοηθά στην αναδιανομή του φορτίου από τις σπασμένες στις γειτονικές άθικτες ίνες.

Ο προσανατολισμός των ινών σε μία κατασκευή σύνθετων υλικών εξαρτάται από τις δομικές απαιτήσεις και από τη διαδικασία παραγωγής. Συνήθως τα σύνθετα υλικά συντίθενται από λεπτά στρώματα που ονομάζονται φύλλα. Μέσα σε κάθε φύλλο οι ίνες τοποθετούνται σε κατευθύνσεις, είτε σε μια κατεύθυνση είτε σε διαφορετικές. Ακολούθως πολλά φύλλα συνδυάζονται και δημιουργούν μια διαστρωμάτωση της επιθυμούμενης δομής. Τελικά η μηχανική και θερμική συμπεριφορά μίας κατασκευής ινοπλισμένων σύνθετων υλικών εξαρτάται από τις ιδιότητες των ινών και του συνδετικού υλικού αλλά επίσης από την ποσότητα και τον προσανατολισμό των ινών.



**Σχήμα 1.1** Στάδια κατασκευής φορέα από διαστρωματωμένα σύνθετα υλικά

### 1.3 Συμμετρικές Διαστρωματώσεις

Μια διαστρωμάτωση καλείται συμμετρική, όταν παρουσιάζει συμμετρία ως προς το μέσο επίπεδό της. Παράδειγμα συμμετρικής διαστρωμάτωσης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

-45	45
-45	-45
0	-45
0	45
0	45
0	-45
-45	-45
-45	45

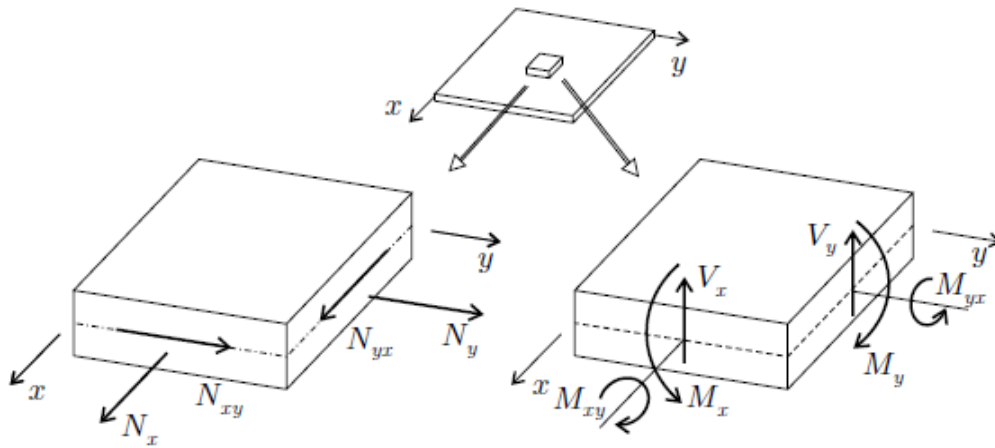
$[-45_2/0_2]_s$ 
 $[45/-45_2/45]_s$

**Σχήμα 1.2** Παράδειγμα συμμετρικής διαστρωμάτωσης

## 1.4 Μητρώα Δυσκαμψίας Διαστρωματώσεων

Οι διαστρωματώσεις χαρακτηρίζονται από τρία μητρώα δυσκαμψίας. Αυτά είναι τα  $[A]$ ,  $[B]$  και  $[D]$  και δείχνουν την απόκριση της διαστρωμάτωσης στις εντός επιπέδου δυνάμεις και ροπές.

- Το μητρώο  $[A]$  περιέχει τις εντός επιπέδου δυσκαμψίες που συσχετίζουν τις εντός επιπέδου δυνάμεις  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  με τις εντός επιπέδου παραμορφώσεις  $\epsilon_{x0}$ ,  $\epsilon_{y0}$ ,  $\gamma_{xy0}$
- Το μητρώο  $[D]$  περιέχει τις καμπτικές δυσκαμψίες που συσχετίζουν τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  με τις καμπυλότητες  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$ .
- Το μητρώο  $[B]$  περιέχει τις δυσκαμψίες που εκφράζουν την αλληλεπίδραση μεμβρανικής έντασης και κάμψης.



**Σχήμα 1.3** Οι δυνάμεις και ροπές και που δρουν στο επίπεδο αναφοράς

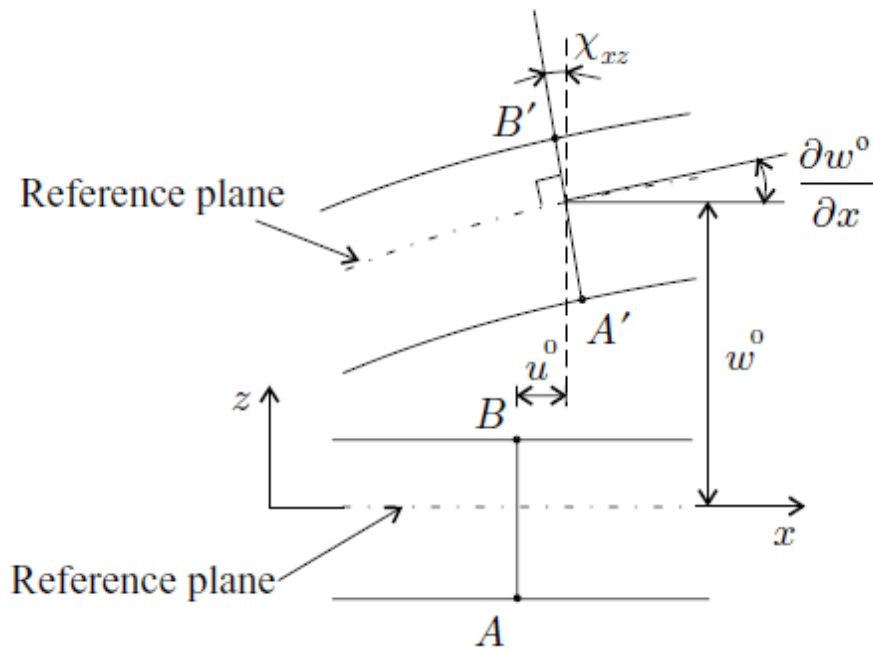
Με τη βοήθεια των κλασικών σχέσεων της αντοχής των υλικών αποδεικνύεται ότι οι παραμορφώσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad [1.1]$$

, ενώ οι καμπυλότητες δίνονται από τις σχέσεις :

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \quad [1.2]$$

Ο δείκτης 0 αναφέρεται στο επίπεδο αναφοράς, όπως φαίνεται στο σχήμα:



**Σχήμα 1.4** Παραμόρφωση πλάκας στο επίπεδο x-z

Οι εντός επιπέδου δυνάμεις και ροπές, όπως φαίνονται στο σχήμα , δίνονται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_x dz & M_y &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_y dz & M_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} z \tau_{xy} dz, \end{aligned} \quad [1.3]$$



Δεδομένου ότι το μητρώο [Q] είναι το μητρώο δυσκαμψίας ενός φύλλου στο σύστημα αναφοράς x-y, οι τάσεις για κάθε φύλλο δίνονται από τη σχέση :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [1.4]$$

Τα στοιχεία των μητρώων [A], [B] και [D] δίνονται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^K (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad [1.5]$$

, όπου είναι:

- k, ο συνολικός αριθμός των φύλλων στη διαστρωμάτωση
- $z_k, z_{k-1}$ , οι αποστάσεις από το επίπεδο αναφοράς των δύο επιφανειών του k-οστού φύλλου
- $(Q_{ij})_k$ , τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του k-οστού φύλλου.

Τελικά, η γενική σχέση που συνδέει δράσεις-παραμορφώσεις είναι:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad [1.6]$$

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζονται συμμετρικές διαστρωματώσεις, όπου δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεμβρανικής έντασης και κάμψης. Επομένως η εξίσωση 1 μετασχηματίζεται στις δύο ακόλουθες:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad [1.7]$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad [1.8]$$



## 2 Θεωρία Λεπτών Πλακών – Συμμετρικές Διαστρωματώσεις

### 2.1 Γενικές Εξισώσεις Ελαστικής Ενέργειας

Λεπτές πλάκες είναι οι πλάκες, το πάχος των οποίων είναι μικρό σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις τους. Οι πλάκες αυτές, για μικρές παραμορφώσεις μπορούν να αναλυθούν με τις εξής παραδοχές :

- a. Οι συναρτήσεις των παραμορφώσεων είναι γραμμικές κατά μήκος της πλάκας
- b. Οι εκτός επιπέδου διατμητικές παραμορφώσεις αμελούνται
- c. Οι εκτός επιπέδου τάσεις  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  είναι μικρές σε σχέση με τις εντός επιπέδου  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$

Υπό συγκεκριμένες παραδοχές μπορούν να εξαχθούν λύσεις είτε μέσω διαφορικών εξισώσεων είτε μέσω ενεργειακών μεθόδων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται η ενεργειακή μέθοδος.

Για επίπεδη ένταση η ελαστική ενέργεια δίδεται από την έκφραση:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-h_b}^{h_t} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz dy dx \quad [2.1]$$

, ενώ ισχύουν επίσης οι εκφράσεις [1.1], [1.2] και [1.4].

Τελικά αποδεικνύεται μαθηματικά ότι η ελαστική ενέργεια ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{matrix} \right\}^T \left[ \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{matrix} \right\} dy dx \quad [2.2]$$

Για συμμετρική διαστρωμάτωση όμως ισχύει ότι  $[B] = [0]$  και οι εντός επιπέδου παραμορφώσεις στο μέσο επίπεδο είναι μηδενικές. Άρα η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

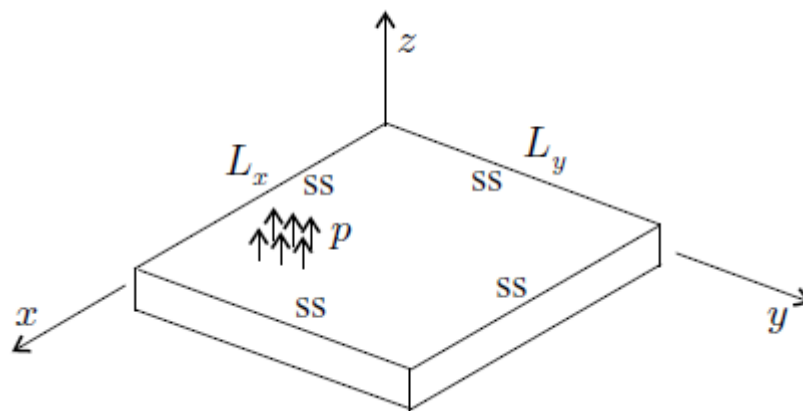
$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \begin{Bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} dydx. \quad [2.3]$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις με τις καμπυλότητες τελικά προκύπτει:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{2\partial^2 w^o}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left( D_{12} \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \frac{2\partial^2 w^o}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \frac{2\partial^2 w^o}{\partial x \partial y} \right) \right] dydx. \quad [2.4]$$

## 2.2 Κάμψη Απλά Εδραζόμενων Ορθογωνικών Πλακών

Έστω μια ορθογωνική πλάκα με διαστάσεις  $L_x$  και  $L_y$ , απλά εδραζόμενη κατά μήκος των τεσσάρων πλευρών της, συμμετρικής διαστρωματώσεως. Η πλάκα υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $p$ , όπως φαίνεται στο σχήμα :



**Σχήμα 2.1** Ορθογωνική απλά εδραζόμενη πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο

Λόγω του ομοιόμορφου φορτίου  $p$ , το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\Omega = - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (pw^0) dy dx. \quad [2.5]$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Ritz, επιλέγεται μία έκφραση για το βέλος που να ικανοποιεί τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες. Για την απλά εδραζόμενη πλάκα οι γεωμετρικές συνθήκες απαιτούν το βέλος να είναι μηδενικό κατά μήκος των πλευρών, δηλαδή:

$$w^0 = 0 \quad \text{at} \quad \begin{cases} x = 0 & \text{and} & 0 \leq y \leq L_y \\ x = L_x & \text{and} & 0 \leq y \leq L_y \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{and} & y = 0 \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{and} & y = L_y. \end{cases}$$

[2.6]

Η παρακάτω συνάρτηση ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες:

$$w^0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y}. \quad [2.7]$$

, όπου:

$I, J$ : πλήθος των όρων που επιλέγεται αυθαίρετα

$w_{ij}$ : σταθερές που υπολογίζονται από την αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας [2.8]

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial (U + \Omega)}{\partial w_{ij}} = 0 \quad [2.8]$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση [2.7] στις σχέσεις [2.4] και [2.5] και εκτελώντας τις παραγωγίσεις, προκύπτει το παρακάτω σύστημα ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J G_{mni} w_{ij} = p_{mn} \quad \begin{cases} i, m = 1, 2, 3, \dots, I \\ j, n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \quad [2.9]$$

Για ευκολία εισάγονται οι μεταβλητές:

$$\begin{aligned} k &= (i - 1)J + j & \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, I \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \\ l &= (m - 1)J + n & \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, I \\ n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \end{aligned} \quad [2.10]$$

Πλέον η εξίσωση [2.9] γράφεται:

$$\sum_{k=1}^{I \times J} G_{kl} w_k = p_l \quad l = 1, 2, 3, \dots, I \times J \quad [2.11]$$

και ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

$$p_l = \begin{cases} \frac{4pL_x L_y}{\pi^2 mn} & \text{if } m \text{ and } n \text{ are odd} \\ 0 & \text{if } m \text{ or } n \text{ is even} \end{cases} \quad [2.12]$$

$$\begin{aligned}
G_{lk} = & \frac{1}{4} L_x L_y \pi^4 \left[ D_{11} \left( \frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j}{L_y} \right)^4 \right] \delta_{lk} \\
& - 2 L_x L_y \pi^4 D_{16} \left[ \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{m}{L_x} \right) \left( \frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 \left( \frac{i}{L_x} \right) \left( \frac{j}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \\
& - 2 L_x L_y \pi^4 D_{26} \left[ \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 \left( \frac{m}{L_x} \right) \left( \frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \left( \frac{i}{L_x} \right) \left( \frac{j}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases} \tag{2.14}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{2i}{i^2 - j^2} \frac{1}{\pi} & \text{if } (i - j) \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } (i - j) \text{ is even} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$k = (i - 1)J + j \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, I \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \tag{2.16}$$

$$l = (m - 1)J + n \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, I \\ n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \tag{2.17}$$



Σε αναπτυγμένη μορφή προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1(I \times J)} \\ G_{21} & G_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_{(I \times J)1} & & & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{(I \times J)} \end{Bmatrix} \quad [2.18]$$

Αντιστρέφοντας τη [2.18], ορίζονται οι συντελεστές  $w_k$ :

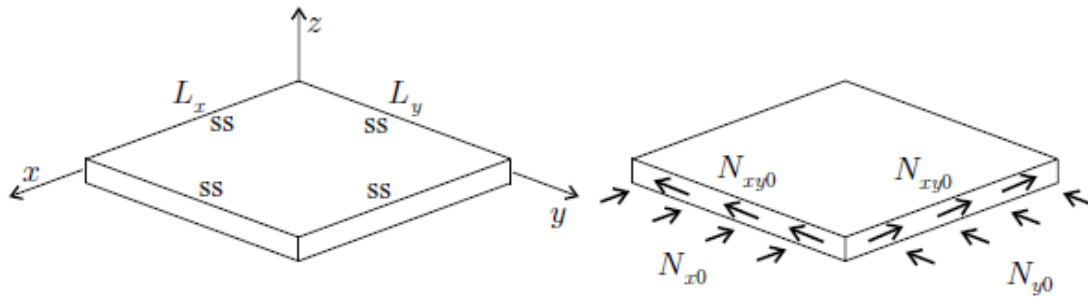
$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1(I \times J)} \\ G_{21} & G_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_{(I \times J)1} & & & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{(I \times J)} \end{Bmatrix} \quad [2.19]$$

Το μητρώο των ροπών δίνεται από τη σχέση :

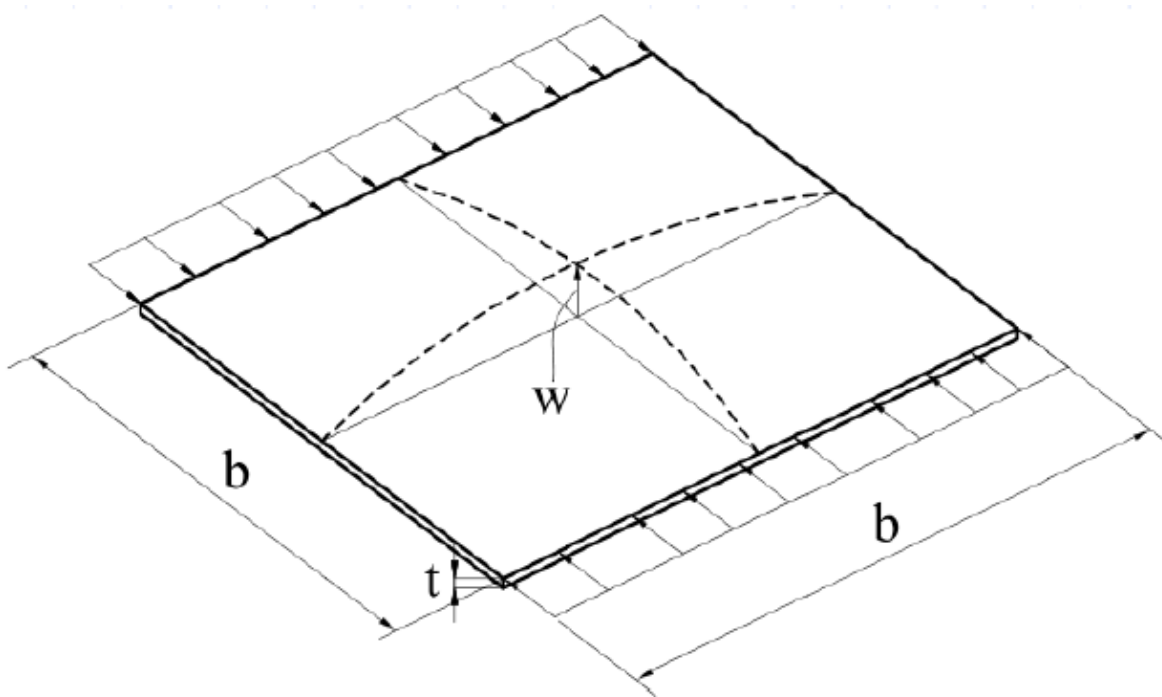
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^2 \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \\ - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} 2 \frac{i\pi}{L_x} \frac{j\pi}{L_y} \cos \frac{i\pi x}{L_x} \cos \frac{j\pi y}{L_y} \end{Bmatrix} \quad [2.20]$$

## 2.3 Λυγισμός Απλά Εδραζόμενων Ορθογωνικών Πλακών

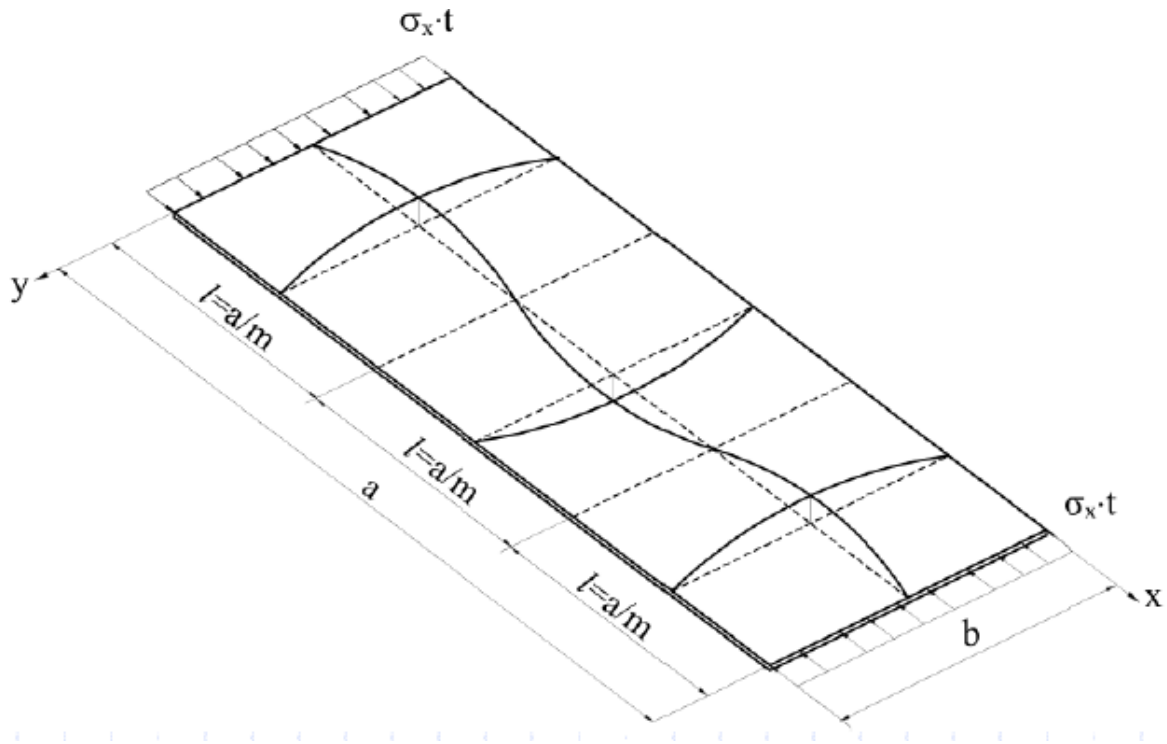
Έστω μια ορθογωνική πλάκα με διαστάσεις  $L_x$  και  $L_y$ , απλά εδραζόμενη κατά μήκος των τεσσάρων πλευρών της, συμμετρικής διαστρωματώσεως. Η πλάκα υπόκειται στα ομοιόμορφα καταναμεμένα φορτία εντός επιπέδου  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$ ,  $N_{xy0}$  γύρω από τις πλευρές της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα φορτία αυξάνονται αναλογικά μέσω ενός συντελεστή  $\lambda$ , όπου γίνονται  $\lambda N_{x0}$ ,  $\lambda N_{y0}$ ,  $\lambda N_{xy0}$ . Όταν επέρχεται λυγισμός, το  $\lambda$  γίνεται  $\lambda_{cr}$ .



**Σχήμα 2.2** Ορθογωνική απλά εδραζόμενη πλάκα υπό θλιπτικά και διατμητικά πλευρικά φορτία



**Σχήμα 2.3** Τετραγωνική τετραέρειστη πλάκα περιμετρικά εδραζόμενη αρθρωτά υπό αξονική θλίψη



**Σχήμα 2.4** Ορθογωνική πλάκα περιμετρικά εδραζόμενη αρθρωτά υπό αξονική θλίψη

Η ελαστική ενέργεια  $U$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left( D_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] dy dx \quad [2.21]$$

και το δυναμικό  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ N_x \left( \frac{\partial w^o}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w^o}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w^o}{\partial x} \frac{\partial w^o}{\partial y} \right] dy dx \quad [2.22]$$

, όπου στα παραπάνω ισχύουν:

$$N_x = -\lambda N_{x0} \quad N_y = -\lambda N_{y0} \quad N_{xy} = -\lambda N_{xy0}. \quad [2.23]$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Ritz διαλέγουμε μια έκφραση για το βέλος  $w$  που να ικανοποιεί τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες. Για την απλά εδραζόμενη πλάκα οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες απαιτούν το βέλος να είναι μηδενικό κατά μήκος των πλευρών, δηλαδή:

$$w^o = 0 \quad \text{at} \quad \begin{cases} x = 0 & \text{and} & 0 \leq y \leq L_y \\ x = L_x & \text{and} & 0 \leq y \leq L_y \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{and} & y = 0 \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{and} & y = L_y \end{cases} \quad [2.24]$$

Η παρακάτω συνάρτηση ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες:

$$w^o = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \quad [2.7]$$

, όπου:

I, J: πλήθος των όρων που επιλέγεται αυθαίρετα

$w_{ij}$ : σταθερές που υπολογίζονται από την αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας [2.8]

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial (U + \Omega)}{\partial w_{ij}} = 0 \quad [2.8]$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση [2.7] στις σχέσεις [2.21] και [2.22] και εκτελώντας τις παραγωγίσεις, προκύπτει το παρακάτω σύστημα ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (G_{mnij} - \lambda b_{mnij}) w_{ij} = 0 \quad \begin{cases} i, m = 1, 2, 3, \dots, I \\ j, n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \quad [2.25]$$

Για ευκολία εισάγονται οι μεταβλητές:

$$\begin{aligned} k &= (i-1)J + j & \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, I \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \\ l &= (m-1)J + n & \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, I \\ n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \end{aligned} \quad [2.10]$$

Πλέον η εξίσωση γράφεται:

$$\sum_{k=1}^{I \times J} G_{kl} w_k = \lambda \sum_{k=1}^{I \times J} b_{kl} w_k, \quad l = 1, 2, 3, \dots, I \times J \quad [2.26]$$

, όπου:

$G_{lk}$  υπολογίζεται από τη σχέση [2.13] και

$b_{kl} = b_{lk}$  και τα οποία υπολογίζονται από τη σχέση [2.27].

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \frac{1}{4} L_x L_y \pi^2 \left[ N_{x0} \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + N_{y0} \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 \right] \delta_{lk} \\ &+ L_x L_y \pi^2 N_{xy0} \left( \frac{i}{L_x} \frac{n}{L_y} r_{mi} r_{jn} + \frac{j}{L_y} \frac{m}{L_x} r_{im} r_{nj} \right) \end{aligned} \quad [2.27]$$

Τελικά η εξίσωση [2.26] σε ανεπτυγμένη μορφή γράφεται ως εξής:

$$\left( \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ G_{(I \times J)1} & & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{(I \times J)1} & & b_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

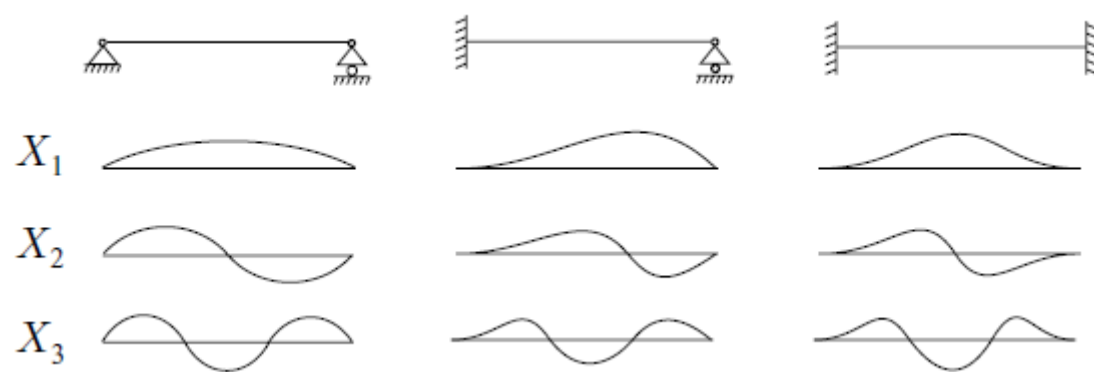
[2.28]

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, οι λύσεις του οποίου αποτελούν τα φορτία λυγισμού της πλάκας. Συνολικά προκύπτουν  $I \times J$  ιδιοτιμές, εκ των οποίων η μικρότερη δίνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω ισχύουν, όπως έχει λεχθεί, για απλά εδραζόμενες πλάκες. Για διαφορετικό είδος στηρίξεων η συνάρτηση που δίνει το βέλος κάμψης του μέσου επιπέδου της πλάκας δίνεται από τη σχέση [2.29], όπου το  $A$  είναι άγνωστος, συμβολίζει το πλάτος και υπολογίζεται από την αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας, όπως φαίνεται στη σχέση [2.30], όπου  $\pi_p$  είναι το άθροισμα ελαστικής ενέργειας και δυναμικού εξωτερικών δυνάμεων. Οι συναρτήσεις  $X_i(x)$  και  $Y_j(y)$  δεν είναι πλέον συναρτήσεις ενός απλού ημιτόνου, αλλά σύνθετες συναρτήσεις με περισσότερους όρους, οι οποίες εκτός των άλλων περιέχουν και όρους υπερβολικών τριγωνομετρικών αριθμών. Στο σχήμα 2.5 φαίνονται οι τρεις πρώτες συναρτήσεις  $X_i(x)$  οι οποίες αποτελούν τις τρεις πρώτες ιδιομορφές μιας ράβδου για διαφορετικά είδη στηρίξεων και ισχύουν και για πλάκες.

$$w^0 = AX_i(x)Y_j(y) \quad [2.29]$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial A} = 0 \quad [2.30]$$



**Σχήμα 2.5** Οι 3 πρώτες ιδιομορφές μιας ράβδου για διάφορες συνθήκες στήριξης





### 3 Ανάλυση Φορέων από Σύνθετα Υλικά μέσω της Γλώσσας Προγραμματισμού MATLAB

#### 3.1 Περιγραφή Προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται πλάκες από σύνθετα υλικά συμμετρικής διαστρωμάτωσης. Ειδικότερα αναλύονται πέντε διαφορετικοί κώδικες διαστρωμάτωσης, οι δύο εκ των οποίων είναι απλές συμμετρικές διαστρωματώσεις, μία ορθότροπη συμμετρική, μία ισορροπημένη συμμετρική και μία σχεδόν ισότροπη. Οι πλάκες είναι εν γένει ορθογωνικές και σε ειδικές περιπτώσεις τετραγωνικές και έχουν διαστάσεις από 0.20 m έως 1.00 m, ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάται κάθε φορά. Το πάχος τους είναι  $t = 4$  mm. Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κάθε πλάκας. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού βρίσκεται από την επίλυση του παρακάτω προβλήματος προβλήματος ιδιοτιμών [2.28]:

$$\left( \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ G_{(I \times J)1} & & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{(I \times J)1} & & b_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [2.28]$$

Τα στοιχεία του μητρώου  $[b]$  δίνονται από τη σχέση [2.27]:

$$b_{lk} = \frac{1}{4} L_x L_y \pi^2 \left[ N_{x0} \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + N_{y0} \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 \right] \delta_{lk} + L_x L_y \pi^2 N_{xy0} \left( \frac{i}{L_x} \frac{n}{L_y} r_{mi} r_{jn} + \frac{j}{L_y} \frac{m}{L_x} r_{im} r_{nj} \right) \quad [2.27]$$

, ενώ τα στοιχεία του μητρώου  $G$  δίνονται από τη σχέση [2.13]:

$$\begin{aligned}
G_{lk} = & \frac{1}{4} L_x L_y \pi^4 \left[ D_{11} \left( \frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j}{L_y} \right)^4 \right] \delta_{lk} \\
& - 2 L_x L_y \pi^4 D_{16} \left[ \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{m}{L_x} \right) \left( \frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 \left( \frac{i}{L_x} \right) \left( \frac{j}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \\
& - 2 L_x L_y \pi^4 D_{26} \left[ \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 \left( \frac{m}{L_x} \right) \left( \frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \left( \frac{i}{L_x} \right) \left( \frac{j}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right]
\end{aligned}$$

[2.13]

Οι υπόλοιπες μεταβλητές που υπεισέρχονται στις σχέσεις [2.13] και [2.27] υπολογίζονται από τις σχέσεις [2.14] έως [2.17].

Τα  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$  και  $N_{xy0}$  μπορούν να πάρουν τιμές από 0 έως 1. Οι κώδικες διαστρωμάτωσης που μελετήθηκαν καθώς και τα μητρώα δυσκαμψίας [D] (για πάχος  $t = 2 \text{ mm}$ ) που ήταν απαραίτητα για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, φαίνονται στο επόμενο σχήμα:

$$\begin{bmatrix} 99.25 & 1.94 & 0 \\ 1.94 & 6.47 & 0 \\ 0 & 0 & 3.03 \end{bmatrix}$$

α)  $[0_{20}]$  Ορθότροπο, Συμμετρικό

$$\begin{bmatrix} 45.30 & 19.52 & 4.45 \\ 19.52 & 25.26 & 4.45 \\ 4.45 & 4.45 & 20.62 \end{bmatrix}$$

β)  $[45_2/-45_2/0_{12}/-45_2/45_2]$  Ισορροπημένο, Συμμετρικό

$$\begin{bmatrix} 65.42 & 16.29 & -18.93 \\ 16.29 & 11.60 & -7.74 \\ -18.93 & -7.74 & 17.39 \end{bmatrix}$$

γ)  $[-30_4/15_4/0_2]_s$  Συμμετρικό

$$\begin{bmatrix} 34.61 & 4.58 & 3.34 \\ 4.58 & 12.34 & 3.34 \\ 3.34 & 3.34 & 5.14 \end{bmatrix}$$

δ)  $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$  Σχεδόν Ισότροπο, Συμμετρικό

$$\begin{bmatrix} 34.84 & 22.93 & 21.71 \\ 22.93 & 28.90 & 21.71 \\ 21.71 & 21.71 & 24.02 \end{bmatrix}$$

ε)  $[45_6/0_4]_s$  Συμμετρικό

**Σχήμα 3.1** Οι 5 κώδικες διαστρωμάτωσης που μελετώνται

Τα μητρώα  $[D]$  για πάχος  $t = 4 \text{ mm}$  υπολογίστηκαν από αυτά του πίνακα κάθε διαστρωμάτωσης [Σχ. 3.1] σύμφωνα με τη σχέση:

$$[D] = \frac{h^3}{12} [Q] \quad [3.1]$$

Οι ιδιότητες των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον **Πίνακα 3.1**, όπου είναι:

- $E_1$ , το διαμήκες μέτρο ελαστικότητας (GPa)
- $E_2$ , το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας (GPa)
- $G_{12}$ , το διαμήκες μέτρο διάτμησης (GPa)
- το  $\nu_{12}$ , ο διαμήκης λόγος Poisson και
- $h_0$ , το πάχος (mm)

**Πίνακας 3.1** Ιδιότητες χρησιμοποιούμενων υλικών

	[0]	$\pm 45'$
$E_1$	148,00	16,39
$E_2$	9,65	16,39
$G_{12}$	4,55	38,19
$\nu_{12}$	0,30	0,80
$h_0$	0,10	0,20

### 3.2 Διαδικασία Επίλυσης Προβλήματος

Τα βήματα που σε γενικές γραμμές ακολουθήθηκαν κατά τη συγγραφή του κώδικα είναι τα εξής:

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Εισαγωγή ιδιοτήτων των υλικών (μητρώο δυσκαμψίας κλπ.)

Βήμα 2<sup>ο</sup>: Προκαθορισμός επιπέδου ακριβείας προβλήματος, που ισοδυναμεί με καθορισμό διαστάσεων βασικών μητρώων στην επίλυση, συνολικό αριθμό ιδιοτιμών και επηρεάζει την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος

Βήμα 3<sup>ο</sup>: Δημιουργία γεωμετρίας φορέα

Βήμα 4<sup>ο</sup>: Επιβολή φορτίσεων στο φορέα, δηλαδή θλιπτικών τάσεων σε μία ή και δύο διευθύνσεις ή και διατμητικών τάσεων

Βήμα 5<sup>ο</sup>: Υπολογισμός μητρώων και παραμέτρων που υπεισέρχονται στην επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών

Βήμα 6<sup>ο</sup>: Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών

Βήμα 7<sup>ο</sup>: Εύρεση κρίσιμου φορτίου λυγισμού

Βήμα 8<sup>ο</sup>: Τύπωση του ζητούμενου κάθε φορά διαγράμματος στην οθόνη, σε κάθε επίλυση, με βάση τις εκάστοτε διαστάσεις πλάκας

Βήμα 9<sup>ο</sup>: Τύπωση των αποτελεσμάτων που εμφανίζονται στο command window του MATLAB σε αρχείο .txt για αποθήκευσή τους και καλύτερη εποπτεία τους

### **3.3 Το Μαθηματικό-Προγραμματιστικό Εργαλείο MATLAB**

#### **3.2.1 Γενικά**

Το MATLAB είναι ένα μαθηματικό λογισμικό περιβάλλον, το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη του να εκτελέσει ποικιλία μαθηματικών υπολογισμών με ταχύτητα, ευκολία και άνεση. Ταυτόχρονα αποτελεί και μία γλώσσα προγραμματισμού, η οποία είναι πολύ εύκολη στην εκμάθηση, πράγμα που αποτελεί πλεονέκτημα σε σχέση με άλλες σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού. Διατίθεται από την εταιρία Mathworks. Εκτός από μαθηματικά και προγραμματισμό διαθέτει και άλλες λειτουργίες, όπως είναι η δημιουργία γραφικών παραστάσεων, η ανάλυση δεδομένων, η προσομοίωση συστημάτων και η ανάπτυξη αλγορίθμων. Το MATLAB αποτελεί ένα από τα πιο εύχρηστα εργαλεία για το Μηχανικό, αφού ενδείκνυται για τη λύση προβλημάτων διανυσματικής μορφής και διατύπωσης, που απαιτούν τη χρήση μητρώων. Σε αυτού του είδους τα προβλήματα το MATLAB υπερτερεί σε σύγκριση με άλλες γλώσσες προγραμματισμού, αφού χρειάζεται λιγότερο χρόνο και κόστος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για διδακτικούς όσο και για ερευνητικούς σκοπούς ενώ οι έτοιμες εργαλειοθήκες που διαθέτει, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων, όπως για παράδειγμα η εργαλειοθήκη βελτιστοποίησης για προβλήματα βελτιστοποίησης ή η εργαλειοθήκη νευρωνικών δικτύων για προβλήματα που έχουν σχέση με νευρωνικά δίκτυα.

### 3.2.2 Βασικές εντολές που χρησιμοποιήθηκαν

Στο MATLAB τα πάντα αποθηκεύονται ως μητρώα. Μητρώο είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Ακόμη και οι απλοί αριθμοί αποθηκεύονται ως μητρώα 1x1. Τα διανύσματα αποθηκεύονται ως μητρώα με αριθμό γραμμών ή στηλών 1. Ακολουθούν οι βασικές εντολές που βοήθησαν στη συγγραφή του κώδικα και δίνονται κάποια παραδείγματα χρήσης τους.

#### Πολλαπλασιασμός μητρώων

Ο πολλαπλασιασμός δύο μητρώων A, B γίνεται αν και μόνο αν ο αριθμός των στηλών του A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του B.

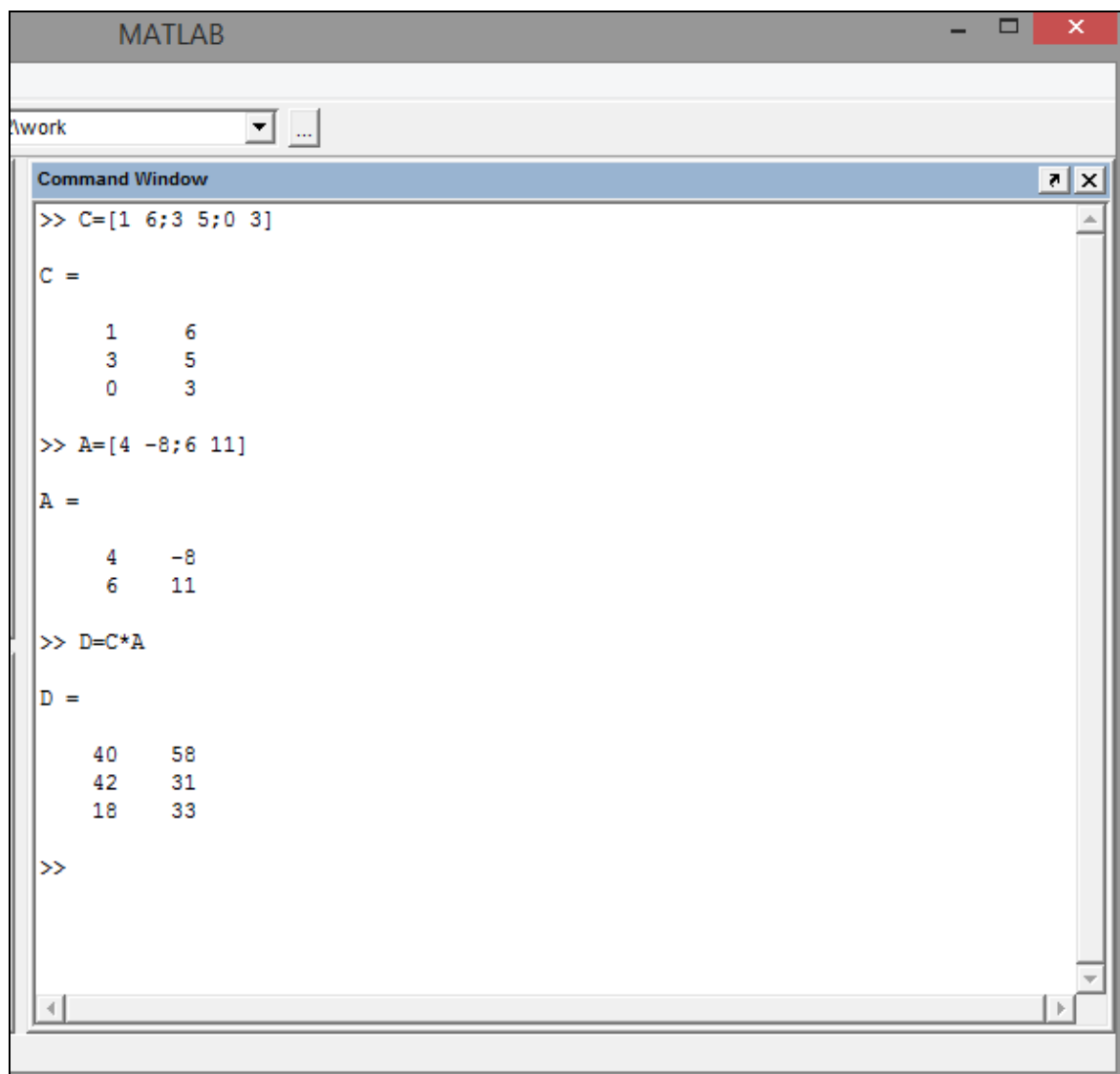
Έστω A ένα μητρώο m x p και B ένα μητρώο p x n.

Τότε το αποτέλεσμα C που δίνει ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι ένα mxn μητρώο, για το

οποίο ισχύει:  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} * b_{kj}$  για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Ο κώδικας MATLAB για τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι ο εξής:

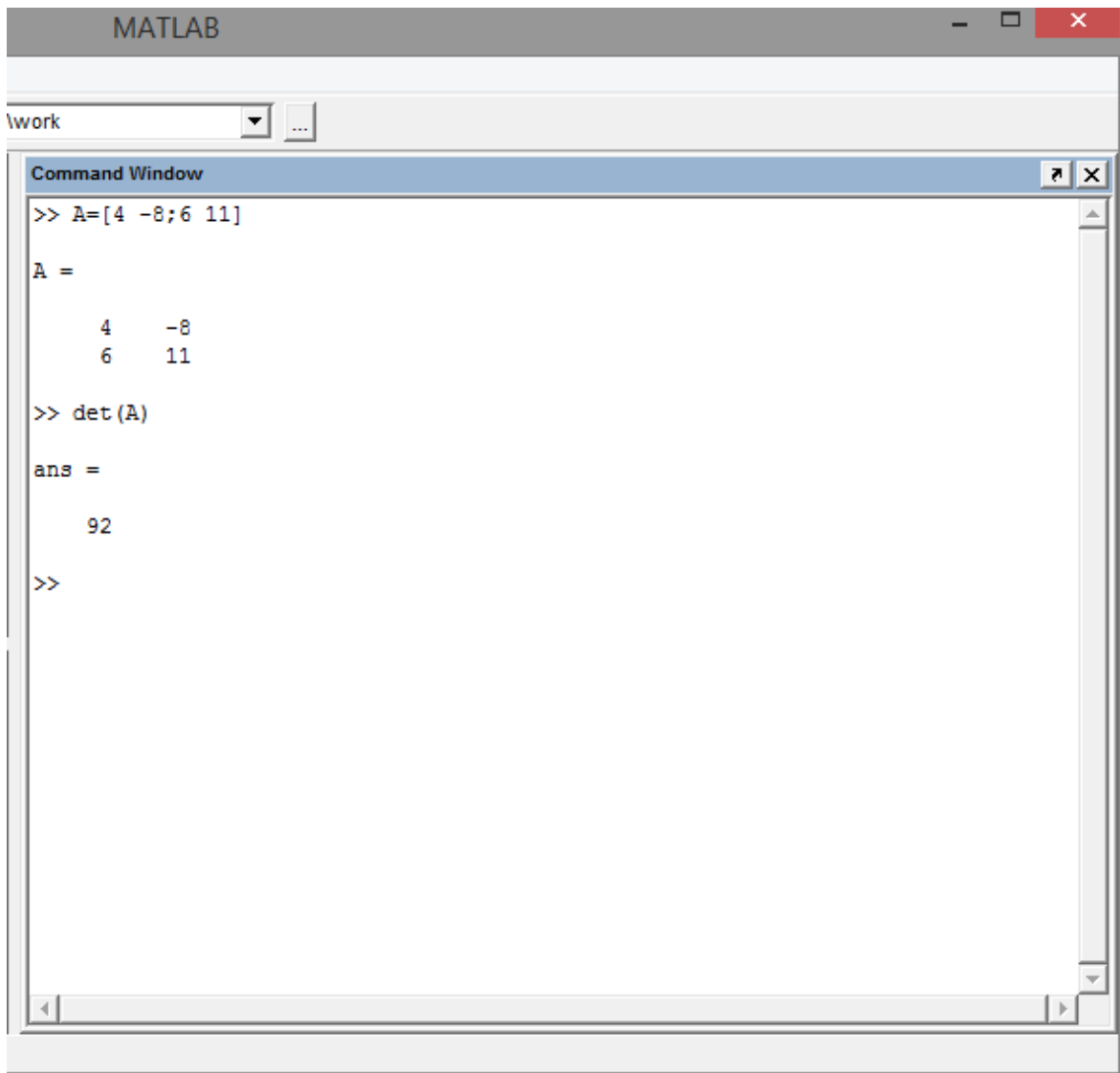
```
for i=1:m
    for j=1:n
        sum=0;
        for k=1:p
            sum=sum+A(i,k)*B(k,j);
        end
        C(i,j)=sum;
    end
end
```



**Εικόνα 3.1** Πολλαπλασιασμός μητρώων στο MATLAB

### Ορίζουσα μητρώου

Το αποτέλεσμα της ορίζουσας ενός μητρώου είναι ο αριθμός που υπολογίζεται αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του μητρώου. Μόνο τα τετραγωνικά μητρώα έχουν ορίζουσα. Η εντολή είναι  $\det(A)$  και επιστρέφει την ορίζουσα ενός πίνακα  $A$ :



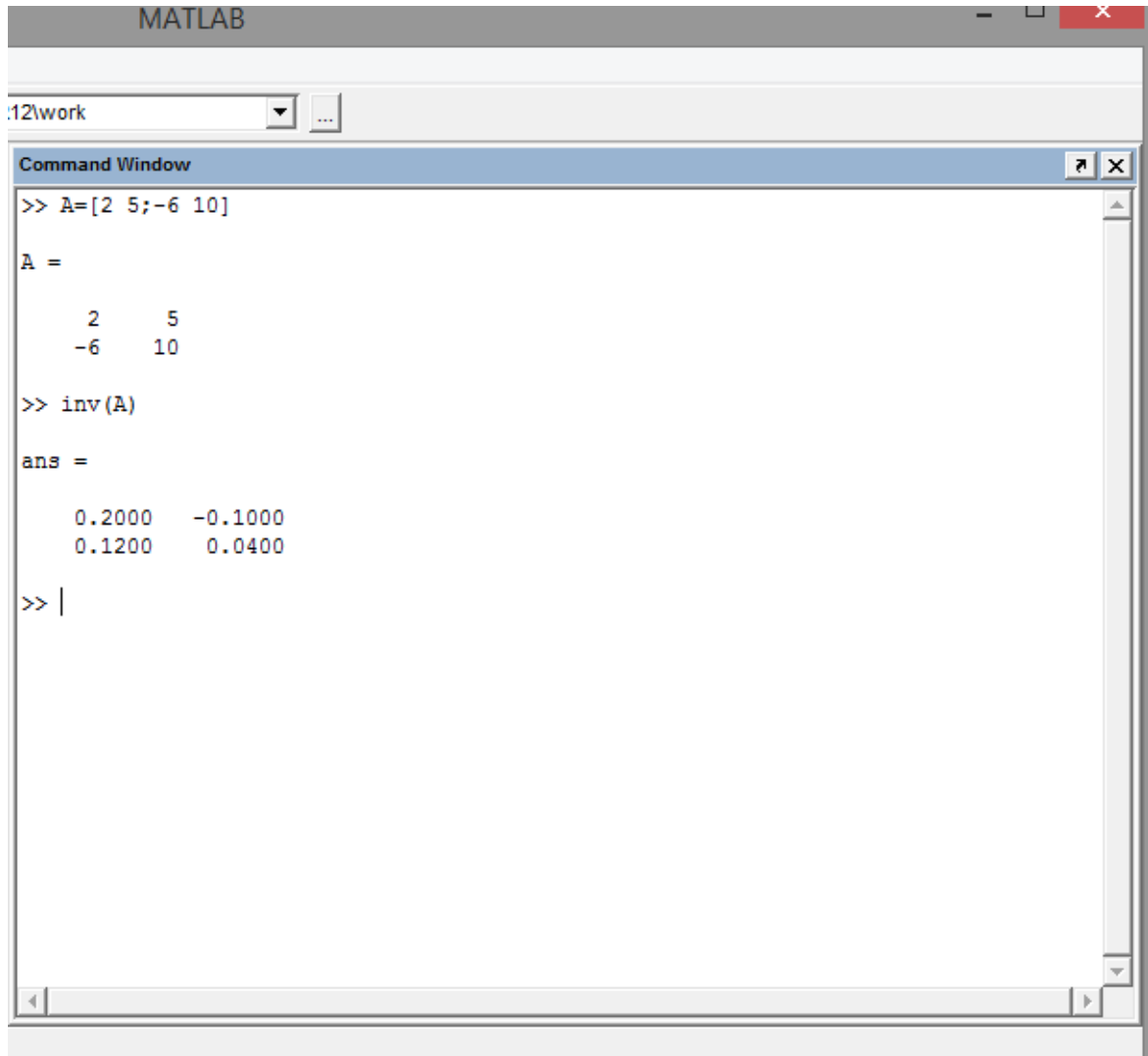
**Εικόνα 3.2** Ορίζουσα μητρώου στο MATLAB



### Αντίστροφο μητρώο

Το αντίστροφο μητρώο ενός μητρώου  $A^{-1}$  ικανοποιεί τη σχέση  $A \cdot A^{-1} = I$ .

Μόνο ένα μητρώο που είναι τετραγωνικό και η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός έχει αντίστροφο. Η εντολή για την εύρεση του αντιστρόφου πίνακα A είναι `inv(A)`.



```
MATLAB

:12\work

Command Window

>> A=[2 5;-6 10]

A =

     2     5
    -6    10

>> inv(A)

ans =

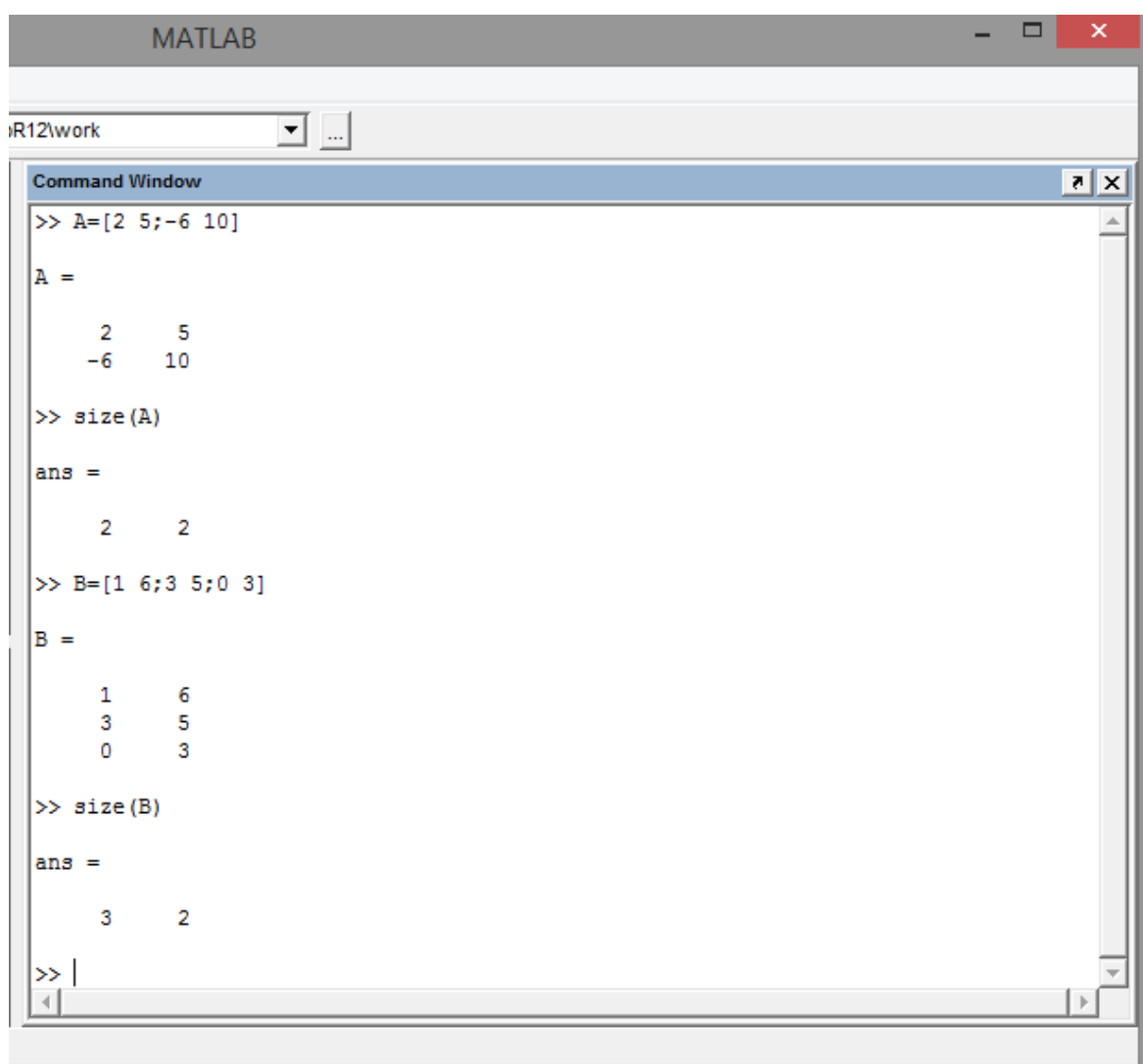
    0.2000   -0.1000
    0.1200    0.0400

>> |
```

**Εικόνα 3.3** Αντίστροφο μητρώο στο MATLAB

### Διαστάσεις μητρώου :

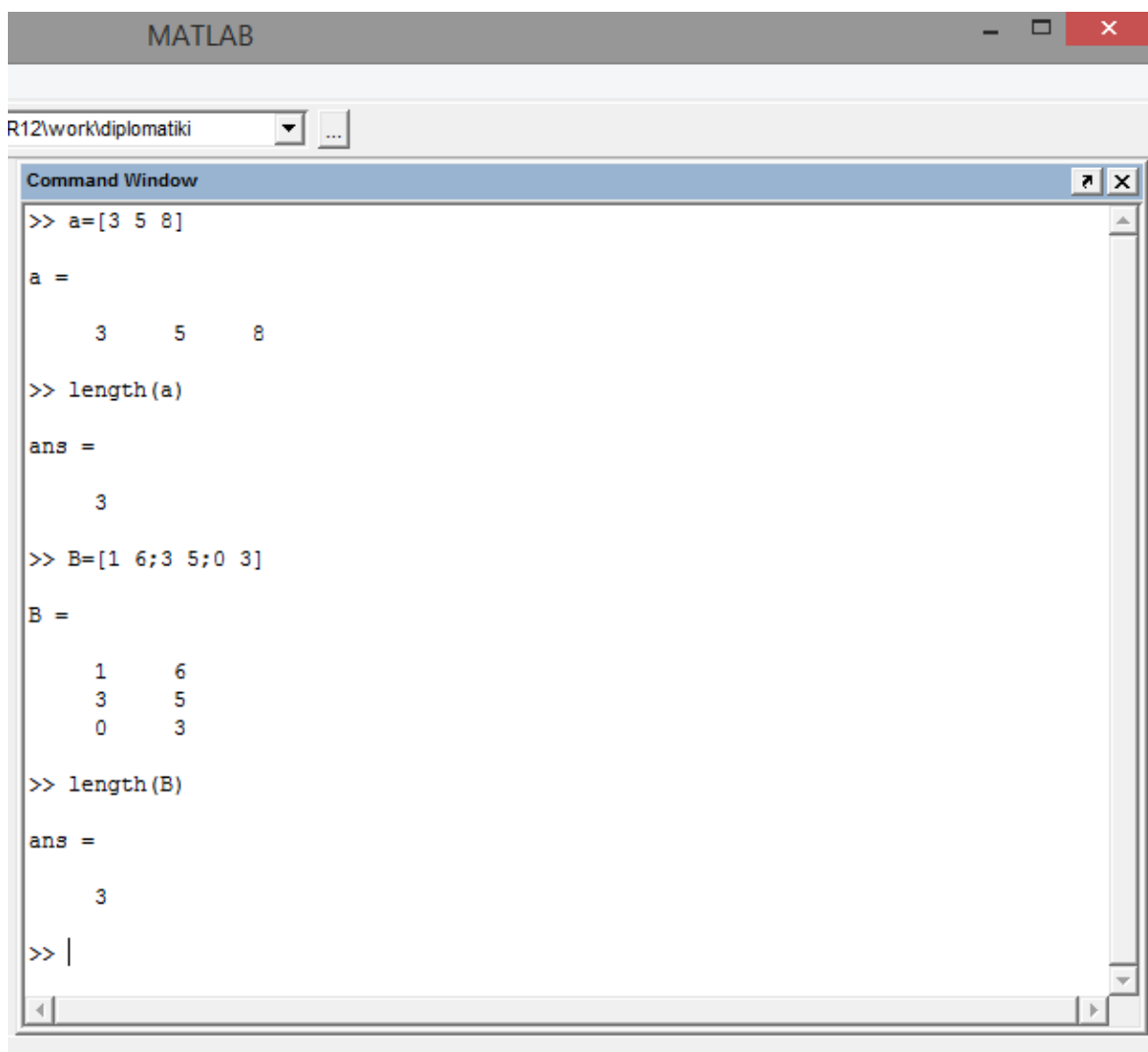
Η εντολή `size(A)` επιστρέφει τις διαστάσεις του πίνακα `A`. Έστω ότι ο `A` είναι ένας πίνακας  $m \times n$ . Τότε η εντολή αυτή επιστρέφει ένα διάνυσμα-γραμμή δύο στοιχείων που περιλαμβάνει τον αριθμό των γραμμών και των στηλών του πίνακα `A`. Είναι μια πολύ χρήσιμη εντολή, ιδιαίτερα κατά τον έλεγχο του κώδικα, όπως επίσης όταν γίνονται πολλές επιλύσεις με διαφορετικά δεδομένα, όπου κατά το χρόνο εκτέλεσης μπορεί να γίνουν λάθη που δεν έχουν προβλεφθεί με αποτέλεσμα να μεταβάλουν διαστάσεις μητρώων, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε λάθος ή απρόβλεπτα αποτελέσματα.



**Εικόνα 3.4** Διαστάσεις μητρώου στο MATLAB

### Μήκος μητρώου :

Η εντολή `length(A)` επιστρέφει τον αριθμό των στοιχείων, αν ο `A` είναι διάνυσμα ή μονοδιάστατος πίνακας. Αν ο `A` είναι πίνακας  $m \times n$  τότε επιστρέφει το μέγεθος της μεγαλύτερης διάστασης του `A`. Η εντολή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον προγραμματιστή, για παράδειγμα κατά τη χρήση βρόχων επανάληψης, σε περιπτώσεις όπου αλλάζουν δεδομένα στον κώδικα, τα οποία μπορούν να μεταβάλουν διαστάσεις μητρώων. Με αυτή την εντολή δεν είναι ανάγκη να γνωρίζει ο προγραμματιστής όλες τις διαστάσεις των μητρώων του αφού υπολογίζονται αυτόματα, καθώς επίσης αποφεύγονται και λάθη κατά τις προσπελάσεις μητρώων, όπως για παράδειγμα η λανθασμένη προσπάθεια σε προσπέλαση στοιχείου  $n+1$  ενός πίνακα  $1 \times n$ , αφού το στοιχείο αυτό δεν υπάρχει.



```
MATLAB

R12\work\diplomatiki

Command Window

>> a=[3 5 8]

a =

     3     5     8

>> length(a)

ans =

     3

>> B=[1 6;3 5;0 3]

B =

     1     6
     3     5
     0     3

>> length(B)

ans =

     3

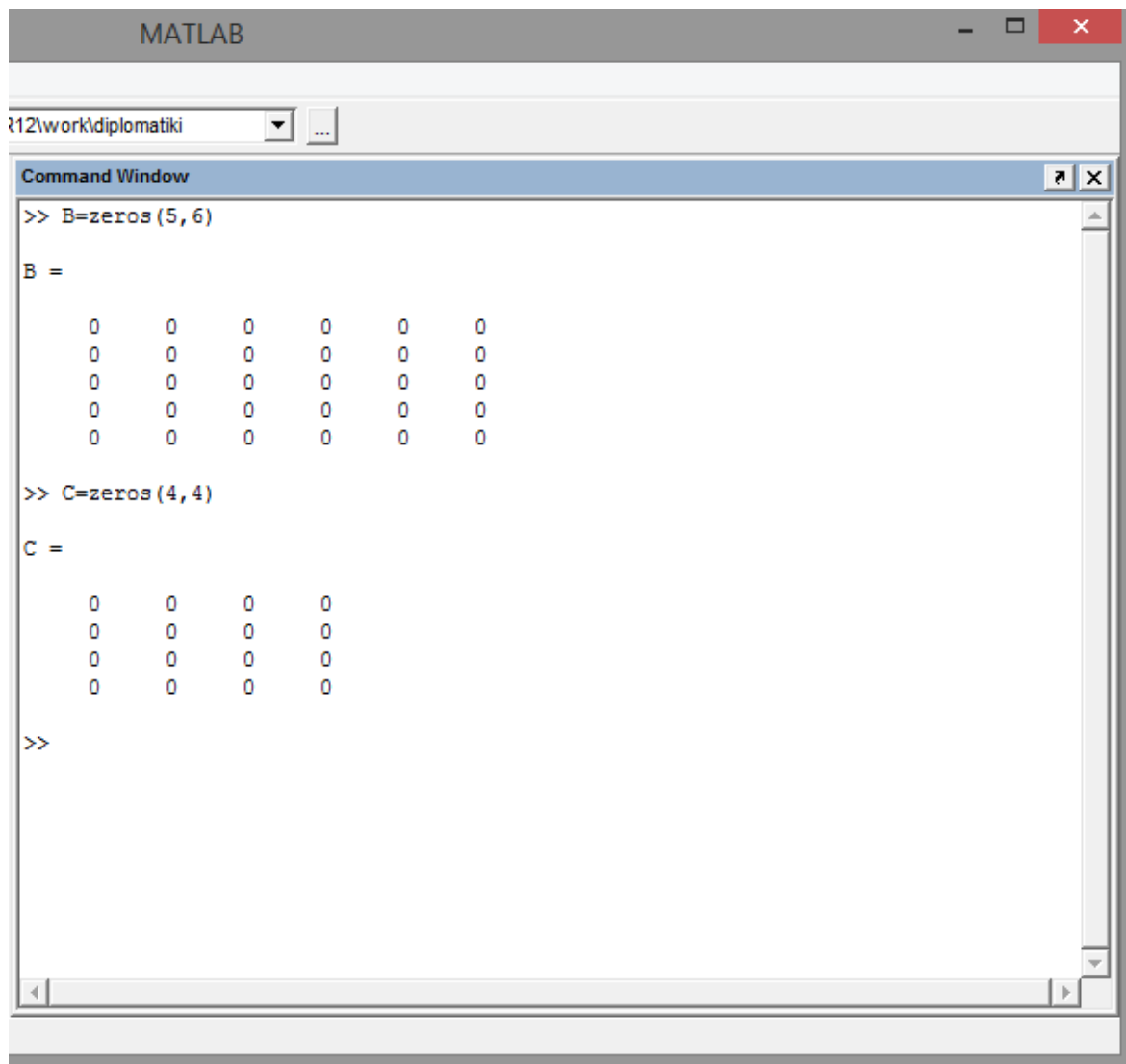
>> |
```

Εικόνα 3.5 Μήκος μητρώου στο MATLAB

### Μηδενικοί πίνακες

Μηδενικοί πίνακες στο MATLAB επιστρέφονται με την εντολή `zeros(m,n)`. Για παράδειγμα η εντολή `A=zeros(m,n)` θα δημιουργήσει έναν πίνακα A με μηδενικά στοιχεία διαστάσεων `m`x`n`. Ο κώδικας που στην ουσία υλοποιείται είναι:

```
for i=1:m
    for j=1:n
        A(i,j)=0
    end
end
```



**Εικόνα 3.6** Μηδενικοί πίνακες στο MATLAB

### Ιδιοτιμές πίνακα

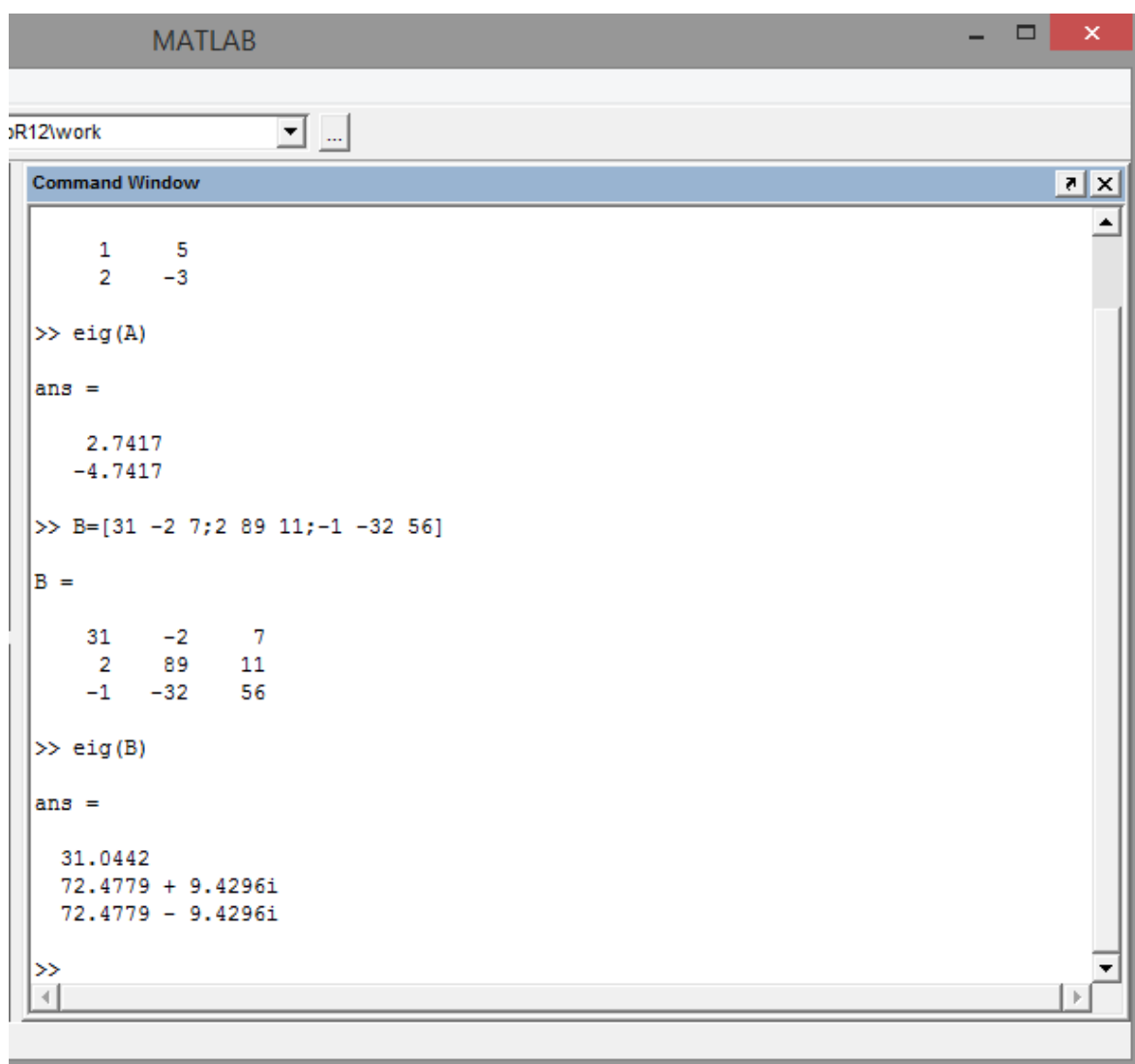
Έστω το διάνυσμα  $x \neq \{0\}$ . Τότε το  $x$  ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , αν ικανοποιεί την εξίσωση  $Ax = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Τότε το  $\lambda$  ονομάζεται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή του πίνακα  $A$ . Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα  $(A - \lambda I)x = 0$ , όπου  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα του μηδενίζεται. Άρα οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από την  $\det(A - \lambda I) = 0$ , η οποία καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα  $A$ . Όμως σε ένα πρόβλημα όπως αυτό της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ισχύει  $(A - \lambda B)x = 0$ , το οποίο αν ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος μετασχηματίζεται σε

$$(B^{-1} * A - \lambda I) = 0$$

Τότε οι ιδιοτιμές του προβλήματος αυτού είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $(B^{-1} * A)$ .

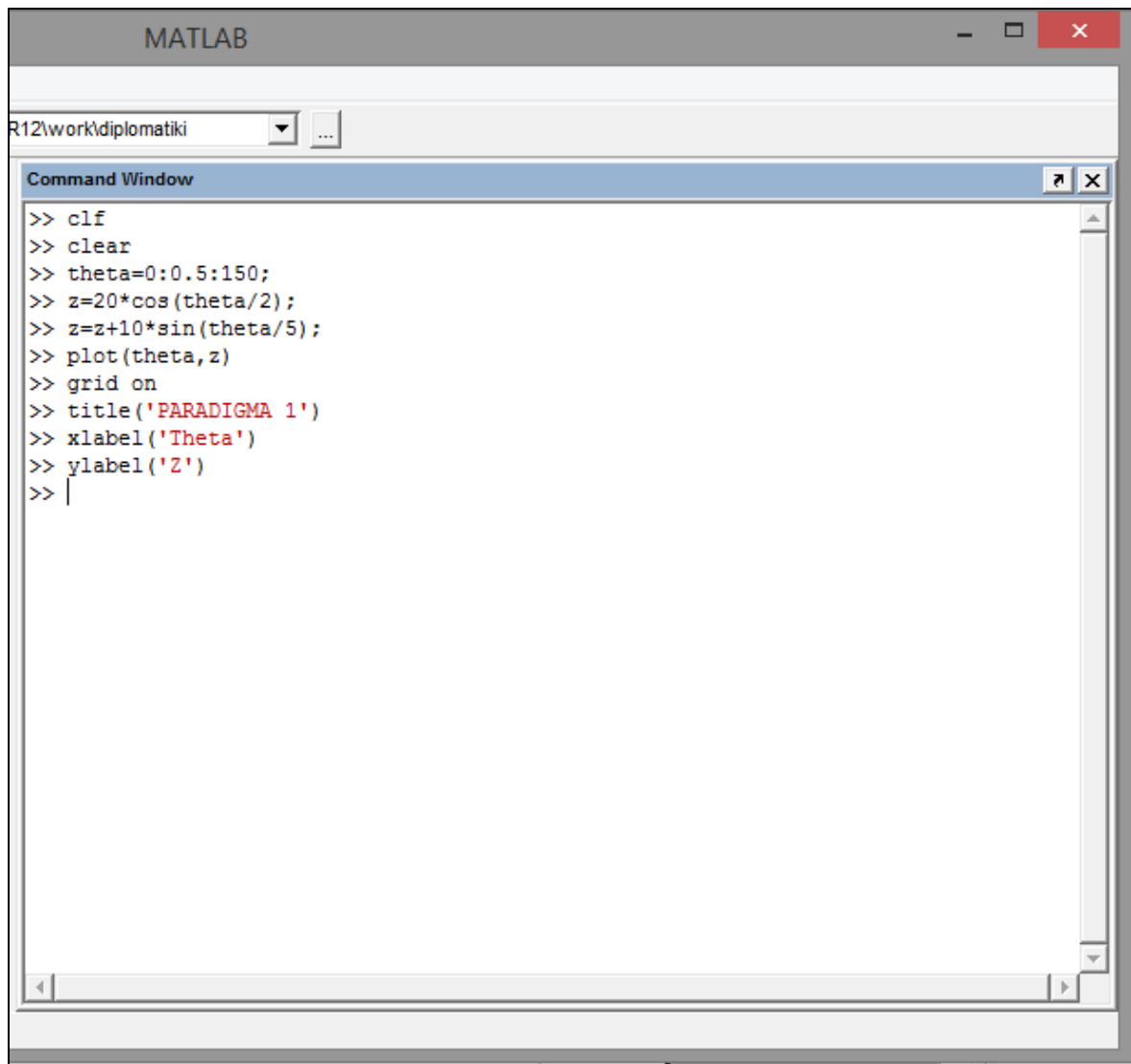
Η εντολή στο MATLAB που επιστρέφει ένα διάνυσμα με τις ιδιοτιμές ενός πίνακα  $A$  είναι η `eig(A)`.



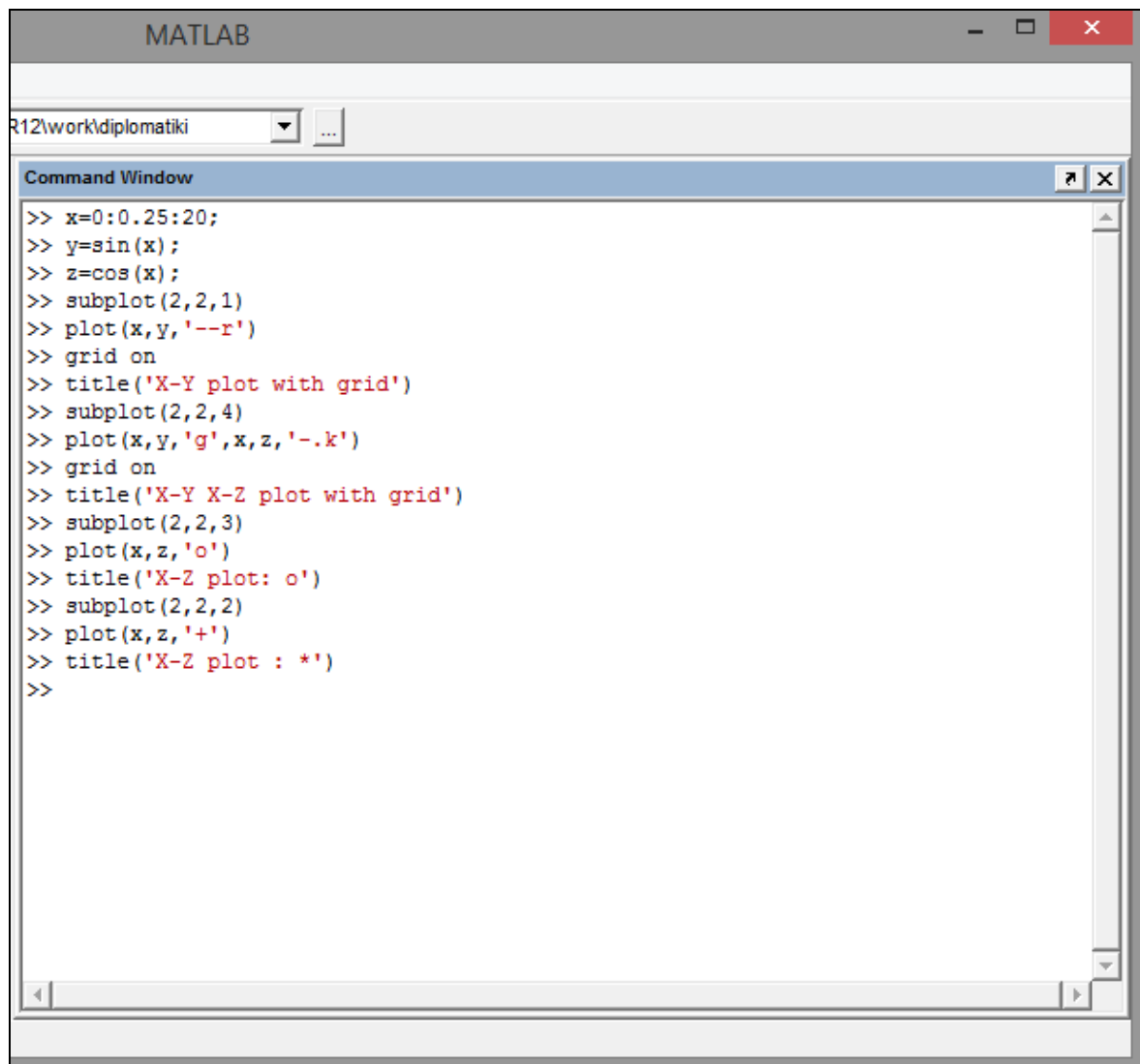
Εικόνα 3.7 Ιδιοτιμές πίνακα στο MATLAB

### Γραφικές παραστάσεις

Το MATLAB ως πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα για το σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων και σχημάτων σε δύο και τρεις διαστάσεις. Οι κυριότερες εντολές που χρησιμοποιούνται είναι η εντολή `plot()` για ένα σχήμα σε ένα γράφημα και η εντολή `subplot()` για πολλαπλά σχήματα σε ένα γράφημα. Κάποιες από τις συχνές εντολές είναι επίσης η εντολή `title()` για προσθήκη τίτλου στο διάγραμμα και οι εντολές `xlabel()` και `ylabel()` για προσθήκη τίτλου στους άξονες συντεταγμένων  $x$  και  $y$  αντίστοιχα.



**Εικόνα 3.8** Εντολές γραφικών παραστάσεων στο MATLAB



**Εικόνα 3.9** Εντολές γραφικών παραστάσεων στο MATLAB



### Προγραμματιστικές δομές ελέγχου

Χρησιμοποιήθηκαν οι εξής δομές:

- **Δομή επιλογής**

**if** συνθήκη 1

θα εκτελεστεί αν η συνθήκη 1 είναι αληθής

**elseif** συνθήκη 2

θα εκτελεστεί αν η συνθήκη 1 δεν είναι αληθής και η συνθήκη 2 είναι αληθής

**else**

θα εκτελεστεί αν καμιά συνθήκη δεν είναι αληθής

**end**

- **Δομή επανάληψης**

**for** μεταβλητή = αρχική τιμή : βήμα : τελική τιμή

εντολές

**end**

και

**while** λογική έκφραση

εντολές

**end**

### Χρήση M-files

Το MATLAB προσφέρει τη δυνατότητα να δημιουργηθούν αρχεία όπου τοποθετούνται ένα σύνολο εντολών, οι οποίες μπορούν να εκτελεστούν σε σειρά, σαν να εισάγονταν μία-μία. Με αυτόν τον τρόπο απλά γράφοντας το όνομα του αρχείου μπορεί ο χρήστης να τις εκτελέσει χωρίς να χρειάζεται να χάσει χρόνο πληκτρολογώντας μία προς μία τις εντολές. Για τη δημιουργία ενός M-file χρησιμοποιείται το μενού του MATLAB : File > > New > > M-File > > File > > Save As > > File name : > > Save as type: M-file(\*.m) Στο MATLAB χρησιμοποιούνται πολύ συχνά και δημιουργούνται συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούνται από συγκεκριμένες εντολές, οι οποίες αφού τοποθετηθούν με συγκεκριμένο τρόπο μπορούν όταν καλείται η συνάρτηση να εκτελεστούν. Το όνομα του αρχείου M-file και το όνομα της αντίστοιχης συνάρτησης που εμπεριέχεται πρέπει να ταυτίζονται. Η μορφή που έχει μια συνάρτηση φαίνεται παρακάτω :

**function**[μεταβλητές εξόδου] = **functionName**[παράμετροι εισόδου]

...

Κώδικας

...

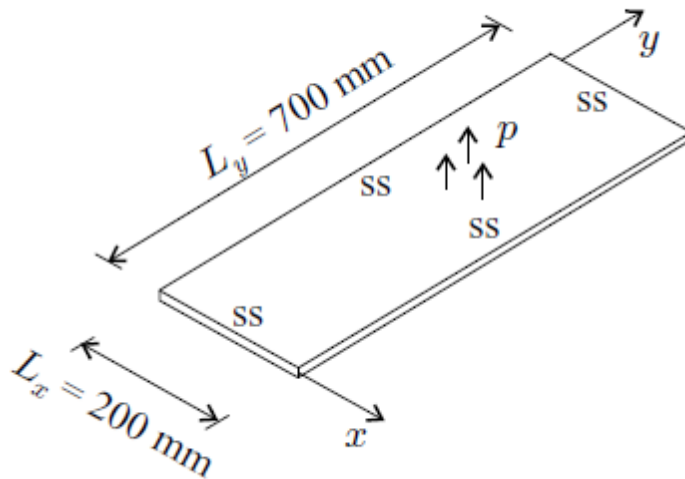
Στην παρούσα διπλωματική εργασία κρίθηκε σκόπιμο τελικά να μην δημιουργηθούν functions, αλλά αντίθετα όλη η διαδικασία να υλοποιηθεί μέσα από τρία βασικά MATLAB scripts, όπου κάθε φορά που θα τρέχουν θα γίνεται η ανάλυση και επίλυση του προβλήματος εξ ολοκλήρου μέσα στα scripts.

### 3.4 Παραδείγματα

Για να κατανοηθεί βαθύτερα το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αλλά και να ελεγχθεί ο κώδικας που αναπτύχθηκε στο MATLAB λύθηκαν κάποιες βασικές ασκήσεις-παραδείγματα.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται κάποια από αυτά, όπου φαίνονται τα αποτελέσματα τα οποία εξήχθησαν μέσω MATLAB:

**A.** Έστω μια ορθογωνική πλάκα από *graphite/epoxy* με κώδικα διαστρωμάτωσης  $[+/-45f2/012/+/-45f2]$  και  $L_x = 200 \text{ mm}$  και  $L_y = 700 \text{ mm}$ . Τα φύλλα  $0$ -μοιρών είναι παράλληλη στην μικρή πλευρά της πλάκας. Η πλάκα είναι απλά εδραζόμενη και στις τέσσερις πλευρές της ενώ υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο  $p=50000 \text{ N/m}^2$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν η μέγιστη παραμόρφωση και οι καμπτικές ροπές.



**Σχήμα 3.1** Η πλάκα του παραδείγματος A

Το βέλος κάμψης και οι ροπές κάμψης της πλάκας δίνονται από τις σχέσεις :

$$w^0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y}$$

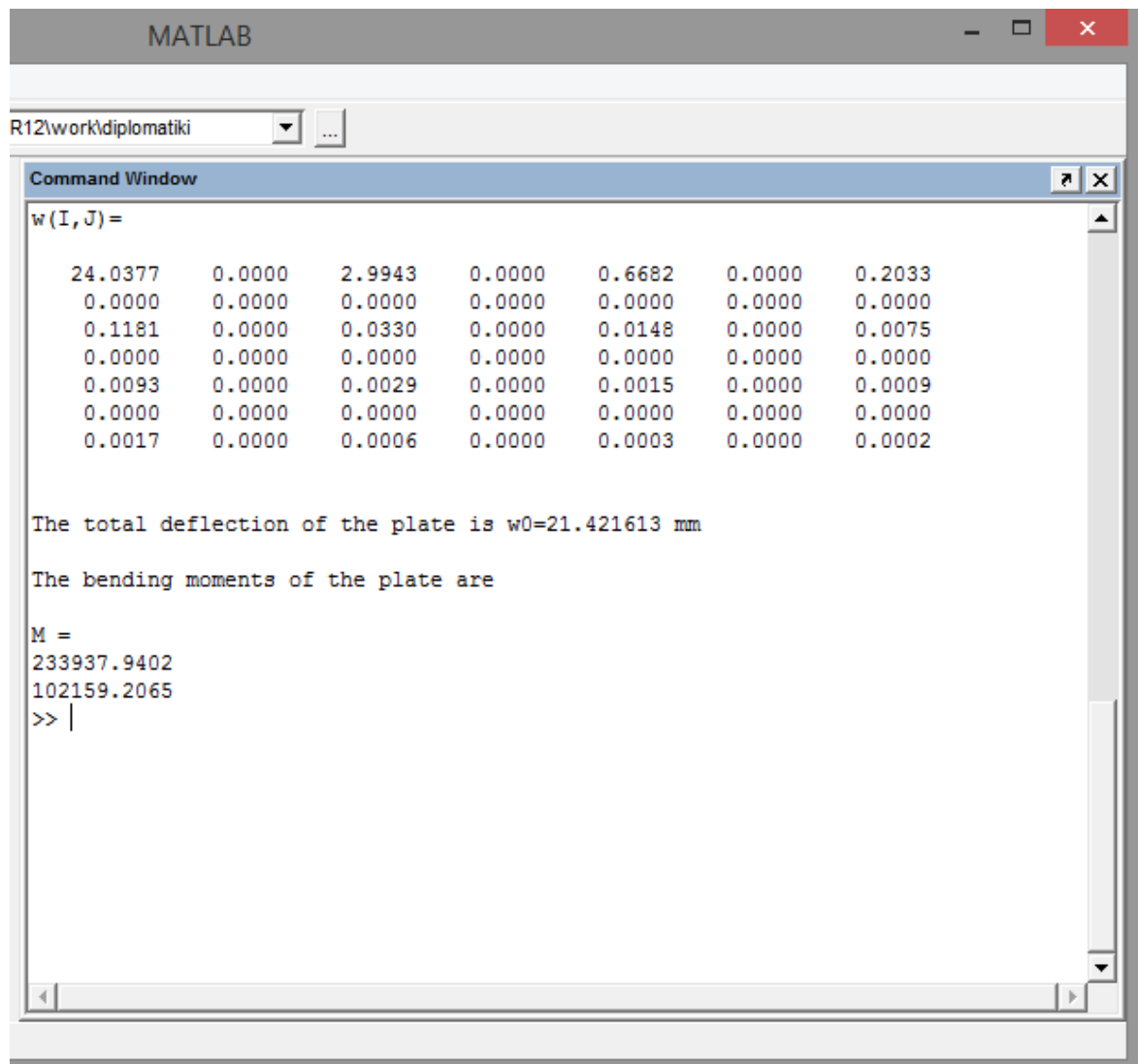
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 w_{ij} \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \\ \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 w_{ij} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2 \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \end{Bmatrix}$$

Η πλάκα είναι ορθότροπη και οι καμπτικές δυσκαμψίες είναι  
 $D_{11} = 45.30 \text{ Nm}$ ,  $D_{22} = 25.26 \text{ Nm}$ ,  $D_{12} = 19.52 \text{ Nm}$ ,  $D_{66} = 20.62 \text{ Nm}$ .

Το μέγιστο βέλος παρουσιάζεται στο κέντρο της πλάκας, όπου  
 $x=L_x/2=0.1 \text{ m}$  και  $y=L_y/2=0.35 \text{ m}$ .

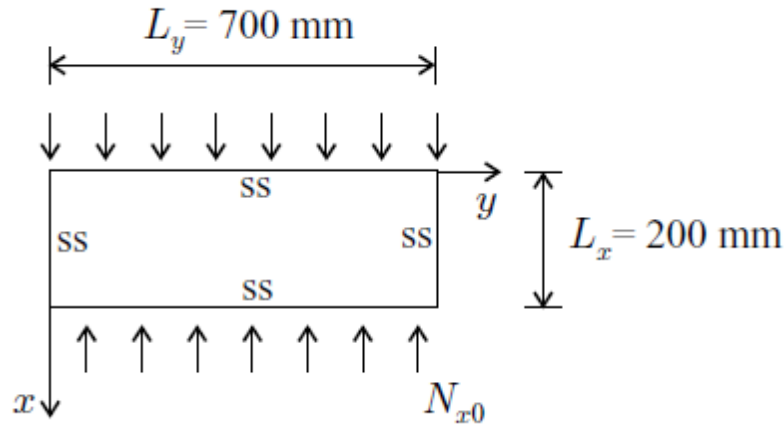
Για  $i=j=7$  το βέλος της πλάκας είναι τελικά:  $w^0 = 21.4 \text{ mm}$ .

Τα αποτελέσματα μέσω MATLAB φαίνονται παρακάτω :



Εικόνα 3.10 Αποτελέσματα παραδείγματος Α στο MATLAB

**B.** Έστω μια ορθογωνική πλάκα από *graphite/epoxy* με κώδικα διαστρωμάτωσης  $[+45f2/012/+45f2]$  και  $L_x = 200 \text{ mm}$  και  $L_y = 700 \text{ mm}$ . Τα φύλλα  $0$ -μοιρών είναι παραλληλα στην μικρή πλευρά της πλάκας. Η πλάκα είναι απλά εδραζόμενη και στις τέσσερις πλευρές της ενώ υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό φορτίο κατά μήκος των μεγάλων πλευρών, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού :



**Σχήμα 3.2** Η πλάκα του παραδείγματος B

Οι καμπτικές δυσκαμψίες της πλάκας είναι

$$D_{11} = 45.30 \text{ Nm}, D_{22} = 25.26 \text{ Nm}, D_{12} = 19.52 \text{ Nm}, D_{66} = 20.62 \text{ Nm}.$$

Η πλάκα είναι ορθότροπη, άρα  $D_{16} = D_{26} = 0$ .

Για ορθότροπη πλάκα οι ιδιοτιμές μπορούν να υπολογιστούν απ' ευθείας από τη σχέση:

$$(\lambda_{cr})_{ij} = \frac{\pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j}{L_y} \right)^4 \right]}{N_{x0} \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + N_{y0} \left( \frac{j}{L_y} \right)^2}$$

Από τη στιγμή που δεν έχω φορτίο στην άλλη διεύθυνση ισχύει ότι  $N_{y0} = 0$ . Τότε η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται στην:

$$\begin{aligned}
N_{x0}(\lambda_{cr})_{ij} &= \pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j}{L_y} \right)^4 \left( \frac{L_x}{i} \right)^2 \right] \\
&= \left( 11.18i^2 + 2.45j^2 + 0.0415 \frac{j^4}{i^2} \right) 10^3.
\end{aligned}$$

Τελικά η μικρότερη ιδιοτιμή που προκύπτει, η οποία αντιστοιχεί και στο κρίσιμο φορτίο είναι  $\lambda_{cr} = N_{x,cr} = 13.67 \text{ kN/m}$ .

Τα αποτελέσματα τα οποία βρέθηκαν μέσω MATLAB φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:

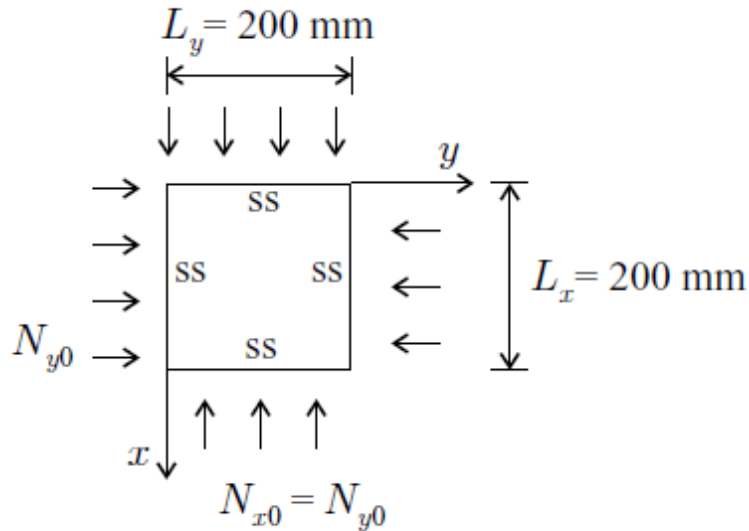
The image shows a MATLAB Command Window with the following text:

```
Gia I = J = 4  
  
To krisimo fortio pou antistixi stin elaxisti idiotimi einai :  
  
lamdacr = min(lamda(i,j)) = 13.666523 kN/m  
  
idiotimes(lamda(i,j))  
    13.666523  
    21.632514  
    36.570516  
    47.167353  
    54.666090  
    60.972552  
    67.579323  
    86.530057  
   103.048220  
   110.460428  
   122.998703  
   140.939937  
   181.287489  
   188.669413  
   201.076453  
   218.664362  
  
>>
```

**Εικόνα 3.11** Αποτελέσματα παραδείγματος Β στο MATLAB



**Γ.** Έστω μια ορθογωνική πλάκα από *graphite/epoxy* με κώδικα διαστρωμάτωσης  $[+-45f2/012/+-45f2]$  και  $L_x = 200 \text{ mm}$  και  $L_y = 700 \text{ mm}$ . Η πλάκα είναι απλά εδραζόμενη και στις τέσσερις πλευρές της ενώ υπόκειται σε ομοιόμορφο θλιπτικό φορτίο κατά μήκος και των τεσσάρων πλευρών της, όπως φαίνεται στο σχήμα . Να υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού:



**Σχήμα 3.3** Η πλάκα του παραδείγματος Γ

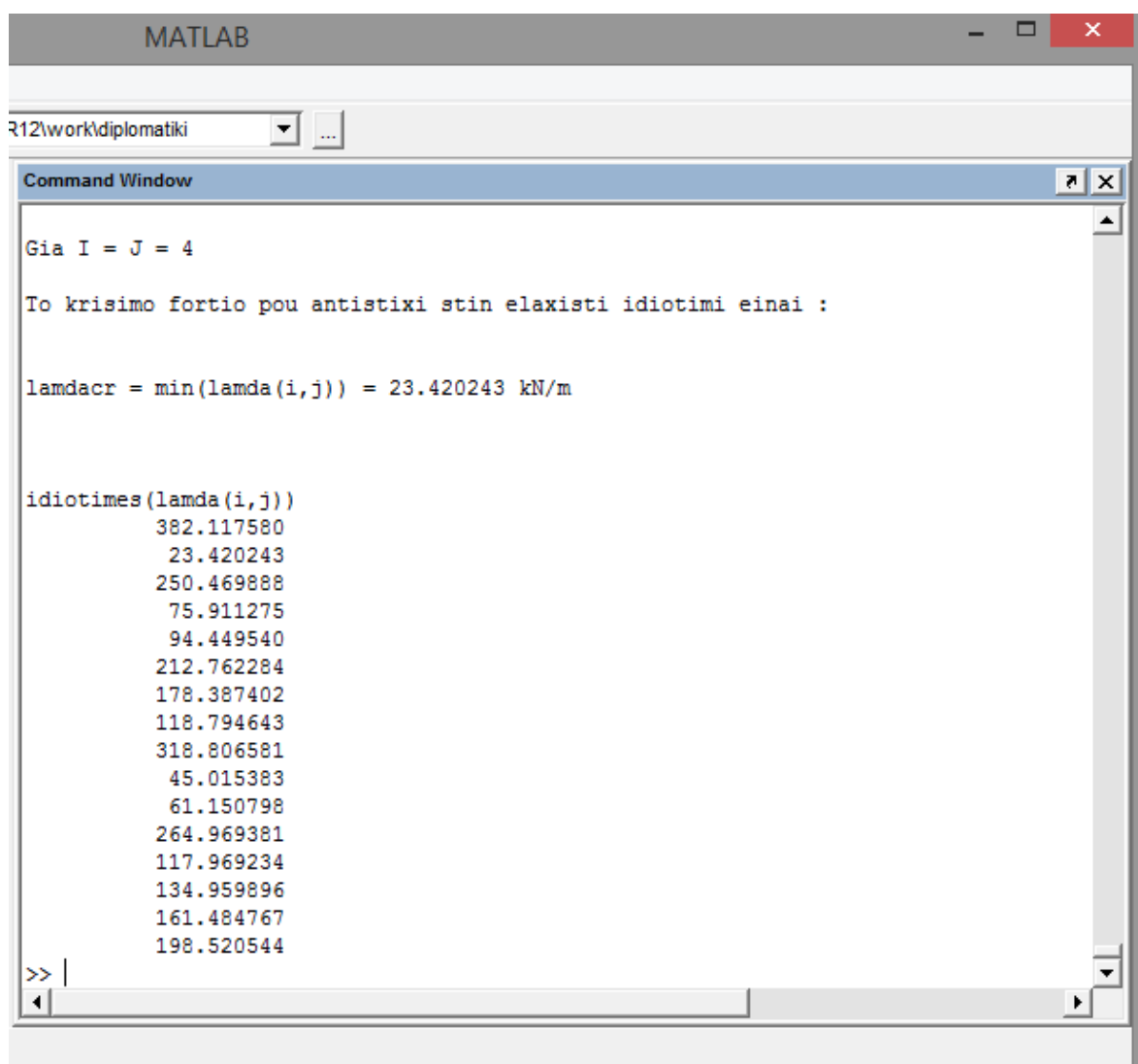
Η διαστρωμάτωση της πλάκας είναι συμμετρική, αλλά όχι ορθότροπη.

Οι καμπτικές δυσκαμψίες ισούνται με

$D_{11} = 45.30 \text{ Nm}$ ,  $D_{22} = 25.26 \text{ Nm}$ ,  $D_{12} = 19.52 \text{ Nm}$ ,  $D_{66} = 20.62 \text{ Nm}$ .  $D_{16} = D_{26} = 4.45 \text{ Nm}$ .

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται τελικά σε  $N_{cr} = 23.42 \text{ kN/m}$ .

Τα αποτελέσματα τα οποία βρέθηκαν μέσω MATLAB φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



**Εικόνα 3.12** Αποτελέσματα παραδείγματος Γ στο MATLAB



## 4 Επεξεργασία και Ανάλυση των Αποτελεσμάτων

### 4.1 Γενικά

Ο κυριότερος σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για απλά εδραζόμενες πλάκες από FRP με τις διαστρωματώσεις όπως περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3. Η εύρεση του κρίσιμου φορτίου γίνεται μέσω της επίλυσης του προβλήματος ιδιοτιμών. Μέσω MATLAB εισήχθη η γεωμετρία και οι διαστάσεις του φορέα. Έπειτα ορίστηκαν τα μητρώα δυσκαμψίας κάθε διαστρωμάτωσης και τα φορτία που καταπονούν τις πλάκες. Στη συνέχεια υπολογίστηκαν τα μητρώα και τα απαραίτητα μεγέθη που υπεισέρχονται στην επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών και εν τέλει υπολογίστηκαν οι ιδιοτιμές του προβλήματος. Το MATLAB επιστρέφει τις ιδιοτιμές σε έναν μονοδιάστατο πίνακα ενώ το κρίσιμο φορτίο αντιστοιχεί στην μικρότερη αποδεκτή ιδιοτιμή. Οπότε για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου ακολουθήθηκε συγκεκριμένη διαδικασία εύρεσης της τιμής αυτής.

Τρεις περιπτώσεις φόρτισης επιβλήθηκαν στις υπό εξέταση πλάκες. Αυτές είναι:

- a) Συνδυασμός θλιπτικών τάσεων κατά τη διεύθυνση  $x$  και διατμητικών τάσεων κατά μήκος και των τεσσάρων πλευρών της πλάκας
- b) Θλιπτικές τάσεις κατά τη διεύθυνση  $x$  και
- c) Θλιπτικές τάσεις κατά τις δύο διευθύνσεις  $x$  και  $y$ .

Για κάθε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις υπολογίστηκαν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού για διάφορα μήκη πλευρών. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων παρουσιάζονται παρακάτω μέσω διαγραμμάτων.

## 4.2 Συνδυασμός Θλιπτικών και Διατμητικών Τάσεων

Έστω η σχέση ,

$$\frac{N_{cr}}{N_{0cr}} + \left( \frac{T_{cr}}{T_{0cr}} \right)^2 = 1 \quad [4.1]$$

η οποία ισχύει για ισότροπα υλικά και φόρτιση με ορθές τάσεις κατά μία διεύθυνση και διατμητικές τάσεις κατά μήκος και των τεσσάρων πλευρών μιας πλάκας, όπου:

- $N_{0cr}$ , το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας για επιβολή μόνο ορθών τάσεων
- $T_{0cr}$ , το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας για επιβολή μόνο διατμητικών τάσεων στο φορέα
- $N_{cr}$ ,  $T_{cr}$  τα κρίσιμα φορτία σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να προσομοιάσει σε έναν βαθμό ικανοποιητικό και τα υλικά που μελετώνται στην παρούσα διπλωματική εργασία χωρίς βλάβη της γενικότητας, παρότι αυτά δεν είναι ισότροπα. Έτσι τα αποτελέσματα που λαμβάνονται μέσω της σχέσης βρίσκονται αρκετά κοντά στα πραγματικά αποτελέσματα, που δίνουν ακριβέστερες σχέσεις που αφορούν ορθότροπα και γενικότερα μη ισότροπα υλικά. Με την παραδοχή λοιπόν ότι ισχύει η κατανομή αυτή, αρχικά βρίσκονται τα κρίσιμα φορτία για τις πλάκες με τις διαστρωματώσεις που περιγράφονται στο κεφάλαιο 3.

Για κάθε διαστρωμάτωση γίνονται τρεις επιλύσεις, όπου το μήκος της πλευράς της πλάκας παράλληλα στην οποία ασκούνται οι ορθές τάσεις παραμένει σταθερό και ίσο με  $L_y = 0.50$  m ενώ το μήκος  $L_x$  μεταβάλλεται. Η πλάκα διαδοχικά επιλύεται για διαστάσεις 50cm x 50cm, 75cm x 50cm και 100cm x 50cm. Το πάχος της πλάκας είναι  $t = 4$ mm ενώ τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον πίνακα 3.1 του κεφαλαίου 3.

Ο σκοπός είναι για κάθε περίπτωση πλάκας να υπολογιστούν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού στις περιπτώσεις

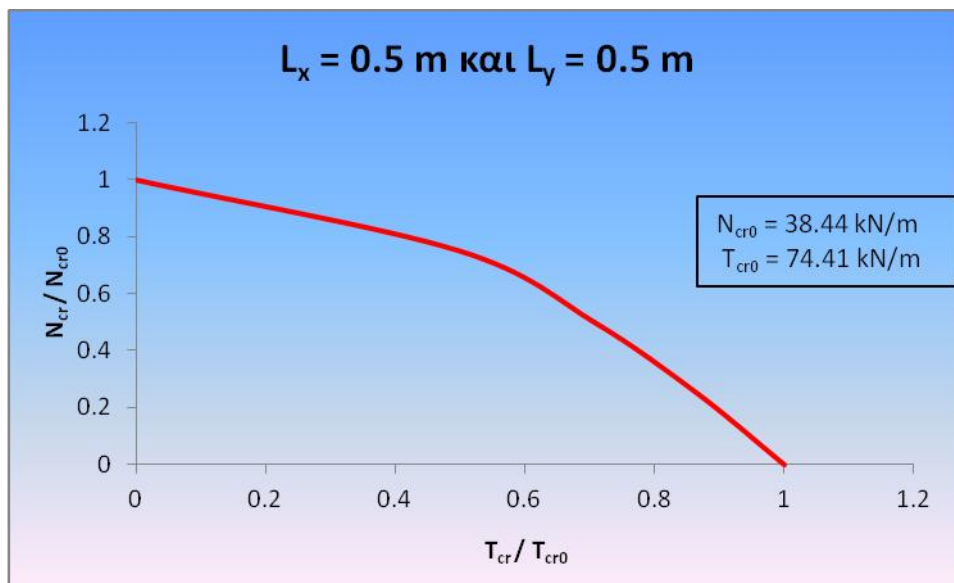
- a) Έπαρξης μόνο θλιπτικών τάσεων κατά μία διεύθυνση και μηδενικών διατμητικών τάσεων όπως και
- b) Έπαρξης διατμητικών τάσεων και μηδενικών θλιπτικών.

Αφού υπολογιστούν αυτά τα κρίσιμα φορτία μπορούν πλέον να υπολογιστούν τα κρίσιμα φορτία για οποιοδήποτε συνδυασμό ορθών και διατμητικών τάσεων στην πλάκα, ακολουθώντας την κατανομή της σχέσης, η οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει και για τα υπό μελέτη υλικά. Οι ιδιοτιμές του προβλήματος που υπολογίζονται αποτελούν φορτία λυγισμού και πιθανά κρίσιμα φορτία λυγισμού. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι η μικρότερη αποδεκτή ιδιοτιμή. Στην περίπτωση της φόρτισης a), οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι όλες θετικές με αποτέλεσμα να λαμβάνεται η μικρότερη ως το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Όμως στην περίπτωση της φόρτισης b), οι ιδιοτιμές του προβλήματος μπορεί να είναι τόσο θετικές όσο και αρνητικές, όπου οι αρνητικές τιμές σημαίνουν απλά αλλαγή κατεύθυνσης της φόρτισης.

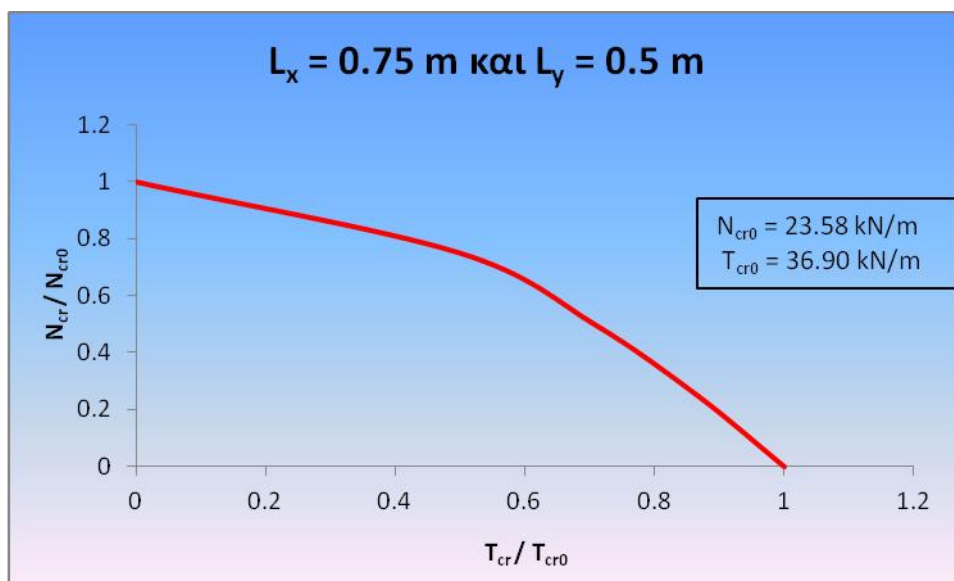
Έπομένως ως κρίσιμο φορτίο λαμβάνεται η κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ιδιοτιμή. Ακολουθούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τη μορφή διαγραμμάτων.

Στα διαγράμματα στον έναν άξονα φαίνεται το αδιάστατο μέγεθος  $T_0/T_{0cr}$  και στον άλλο άξονα διαφαίνεται το επίσης αδιάστατο μέγεθος  $N_0/N_{0cr}$ .

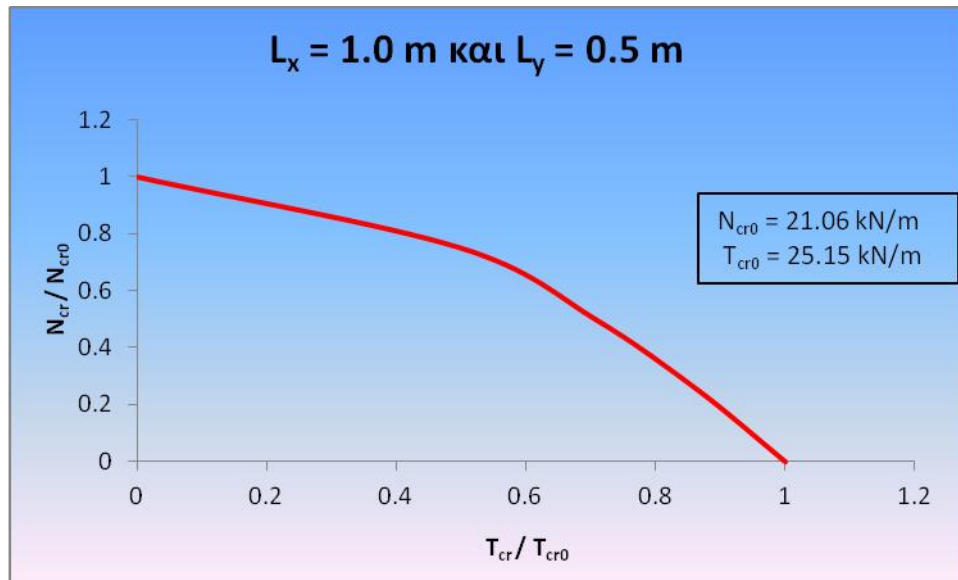
Τα σχήματα **4.1**, **4.2**, **4.3** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης α) [0<sub>20</sub>] ορθότροπου συμμετρικού.



**Σχήμα 4.1** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.5 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

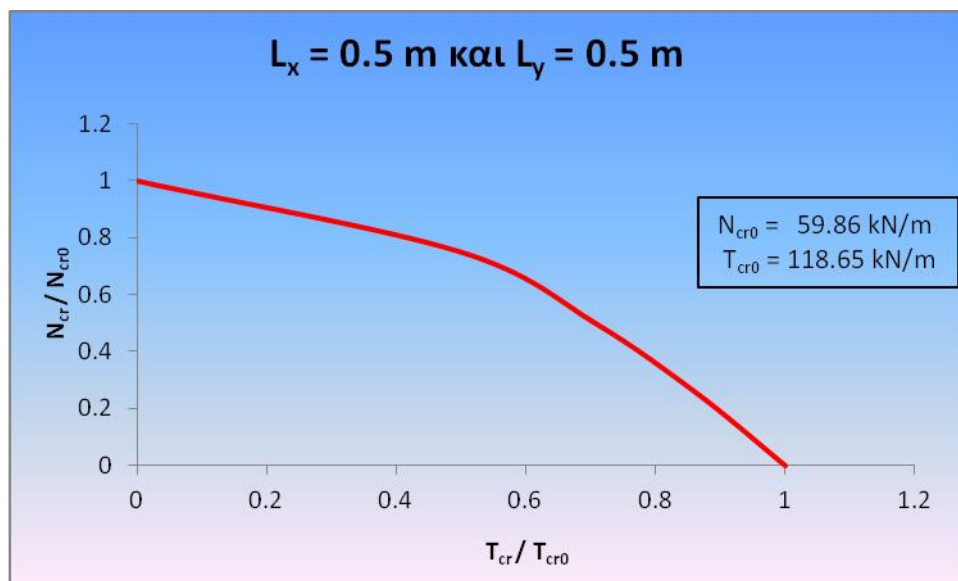


**Σχήμα 4.2** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.75 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

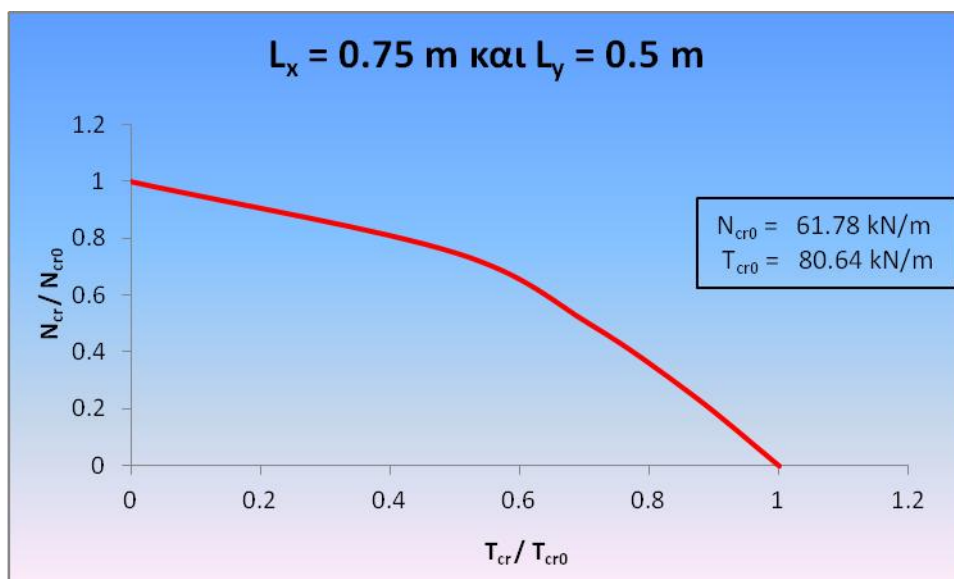


**Σχήμα 4.3** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 1 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

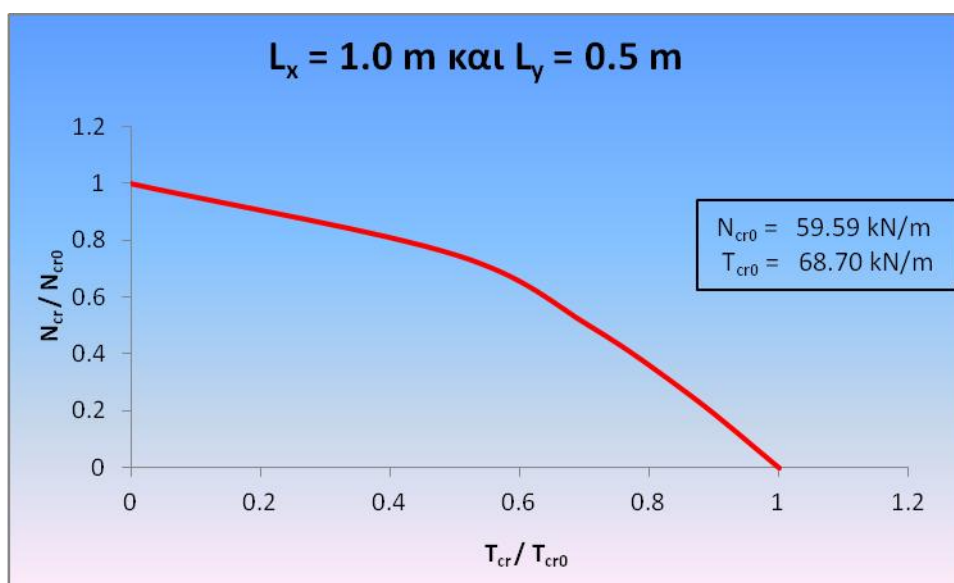
Τα σχήματα **4.4**, **4.5**, **4.6** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης β)  $[45_2/-45_2/0_{12}/-45_2/45_2]$  ισορροπημένου, συμμετρικού



**Σχήμα 4.4** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.5 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$



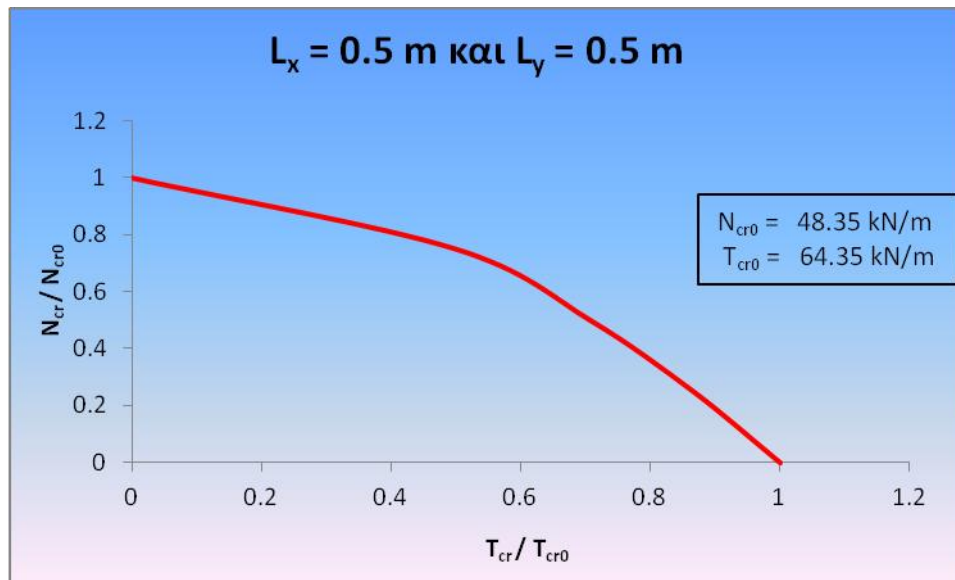
**Σχήμα 4.5** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.75 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$



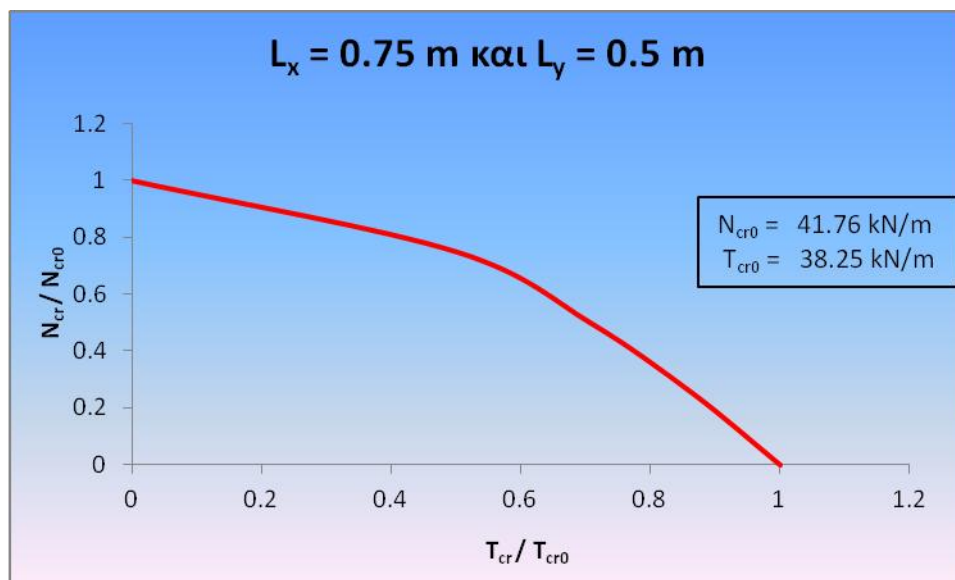
**Σχήμα 4.6** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 1 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$



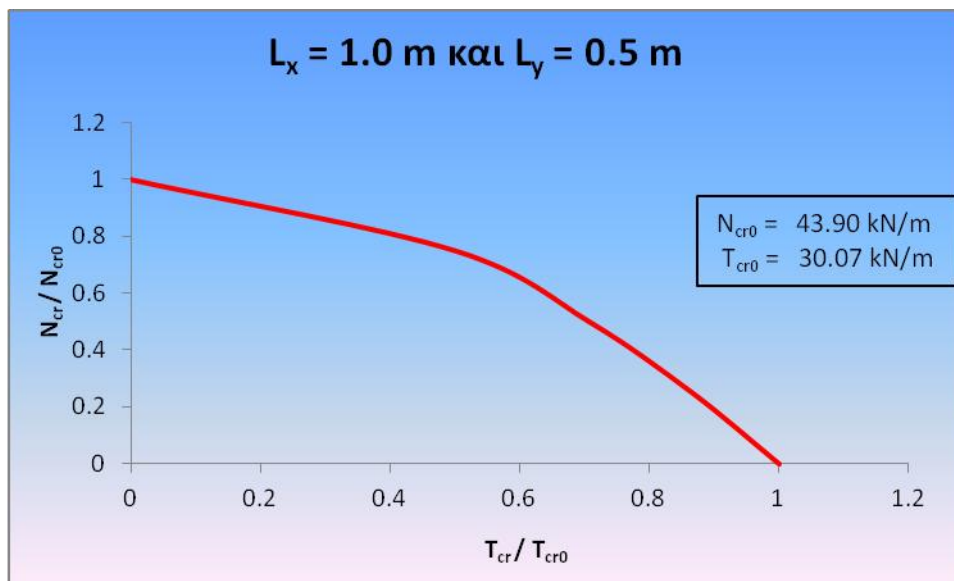
Τα σχήματα 4.7, 4.8, 4.9 αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης γ) [-30<sub>4</sub>/15<sub>4</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> συμμετρικού



**Σχήμα 4.7** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.5 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

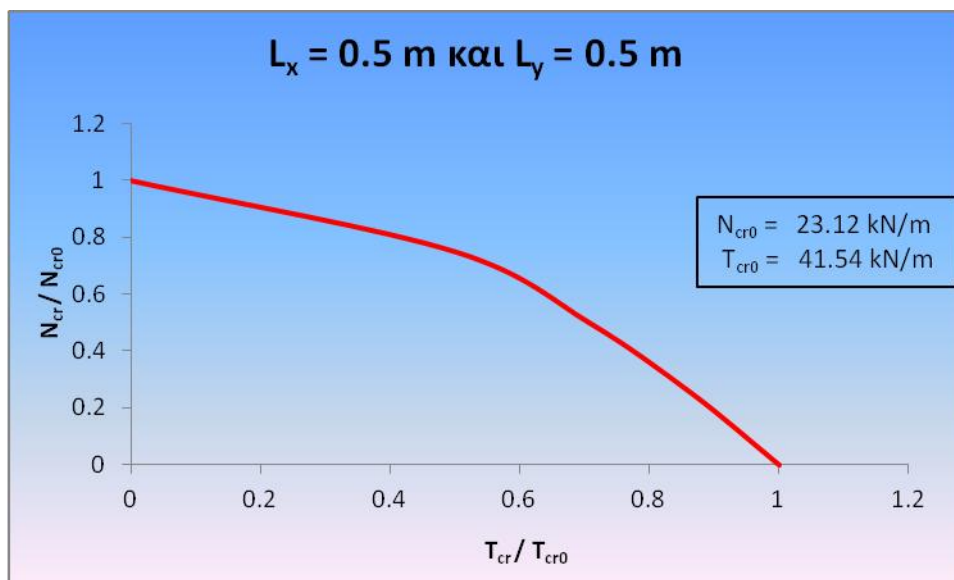


**Σχήμα 4.8** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.75 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

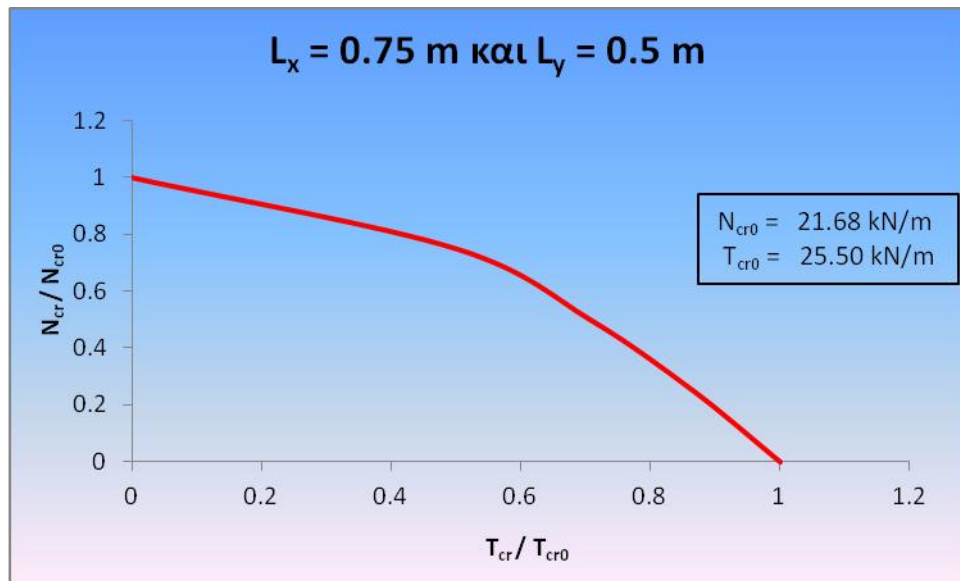


**Σχήμα 4.9** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 1 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

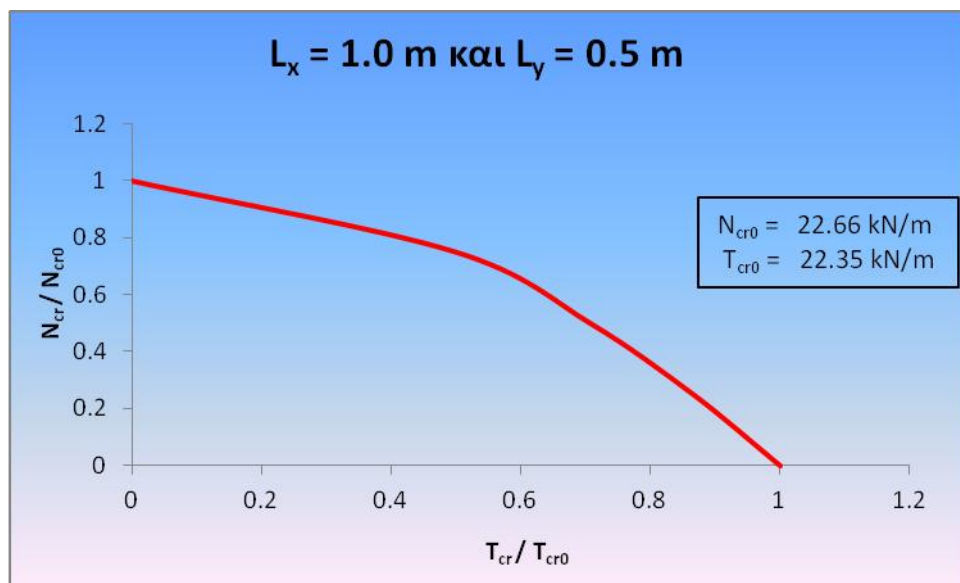
Τα σχήματα **4.10**, **4.11**, **4.12** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης δ)  $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$  σχεδόν ισότροπου συμμετρικού



**Σχήμα 4.10** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.5 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

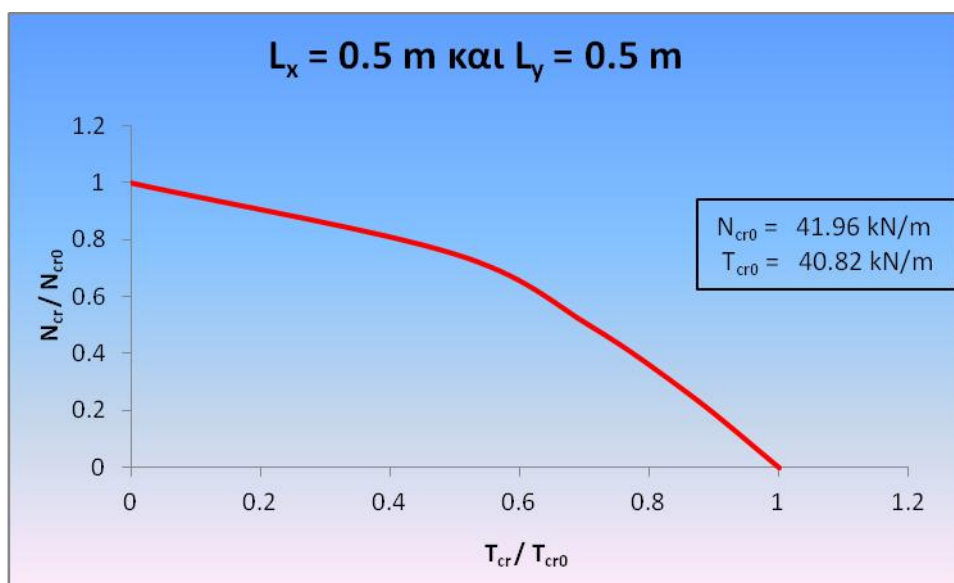


**Σχήμα 4.11** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.75 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

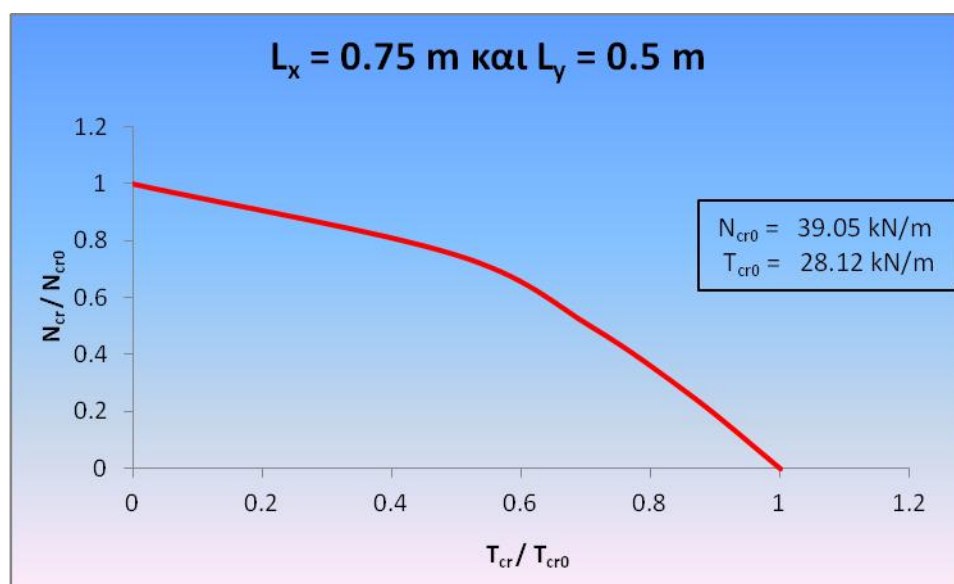


**Σχήμα 4.12** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 1 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

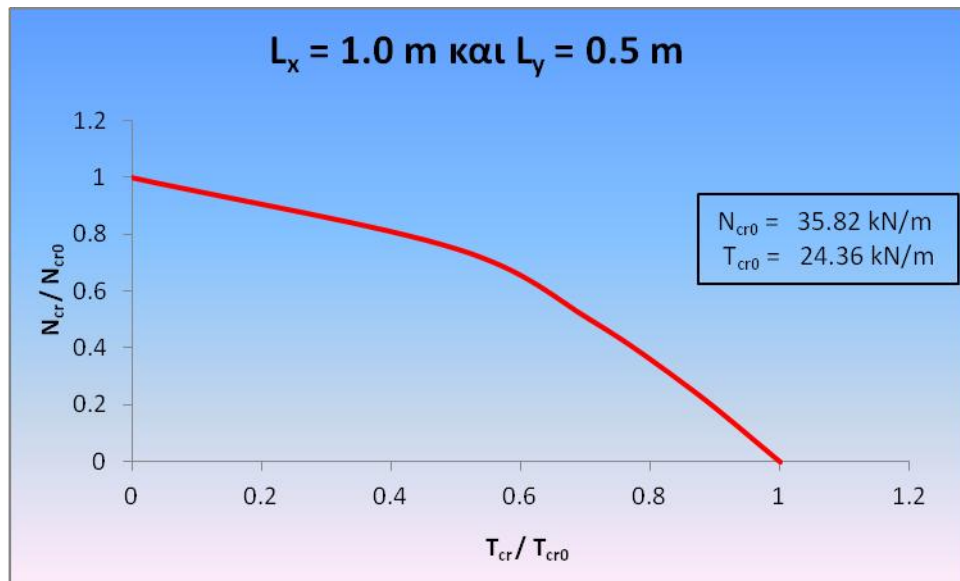
Τα σχήματα 4.13, 4.14, 4.15 αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης  $\epsilon) [45_6/0_4]_s$  συμμετρικού



**Σχήμα 4.13** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.5 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$



**Σχήμα 4.14** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 0.75 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$



**Σχήμα 4.15** Αλληλεπίδραση κρίσιμου φορτίου ορθών και διατμητικών τάσεων για  $L_x = 1 \text{ m}$  και  $L_y = 0.5 \text{ m}$

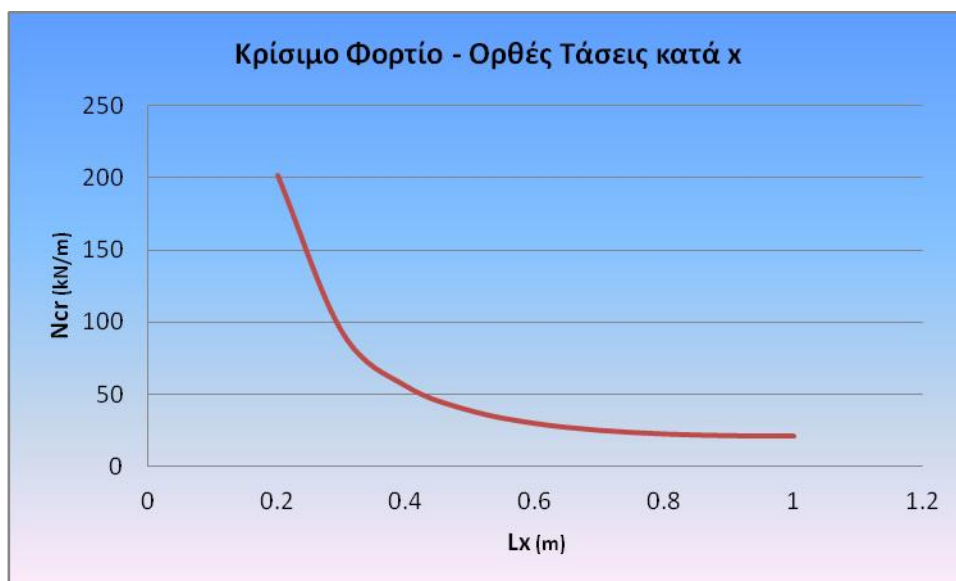
### 4.3 Θλιπτικές Τάσεις μόνο κατά τη Διεύθυνση x

Στο παρόν υποκεφάλαιο εξετάζονται πλάκες απλά εδραζόμενες με διαστρωματώσεις όπως αυτές έχουν παρουσιασθεί στο κεφάλαιο 3. Κάθε πλάκα φορτίζεται με θλιπτικές τάσεις μόνο κατά τη διεύθυνση x και βρίσκεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Το πάχος των πλακών είναι  $t = 4\text{mm}$  ενώ τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον πίνακα 3.1 του κεφαλαίου 3.

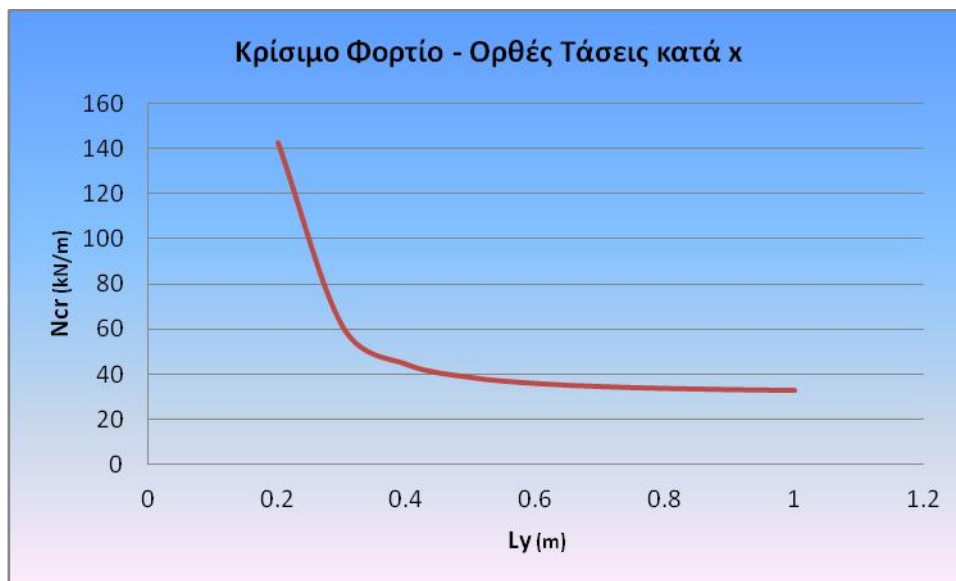
Για κάθε πλάκα γίνονται δύο επιλύσεις όπου κάθε φορά μία από τις διαστάσεις της πλάκας παραμένει σταθερή και ίση με  $0.50\text{ m}$  ενώ η άλλη διάσταση μεταβάλλεται από  $0.20\text{ m}$  έως  $1.00\text{ m}$  και υπολογίζονται τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία λυγισμού. Έπειτα η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου σε σχέση με την διάσταση που κάθε φορά μεταβάλλεται απεικονίζεται σε διάγραμμα. Λόγω της ύπαρξης μόνο θλιπτικών τάσεων στο φορέα οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι θετικές. Έτσι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα που παρήχθησαν από τις επιλύσεις που έγιναν.

Τα σχήματα **4.16**, **4.17** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης α)  $[0_{20}]$  ορθότροπου συμμετρικού.

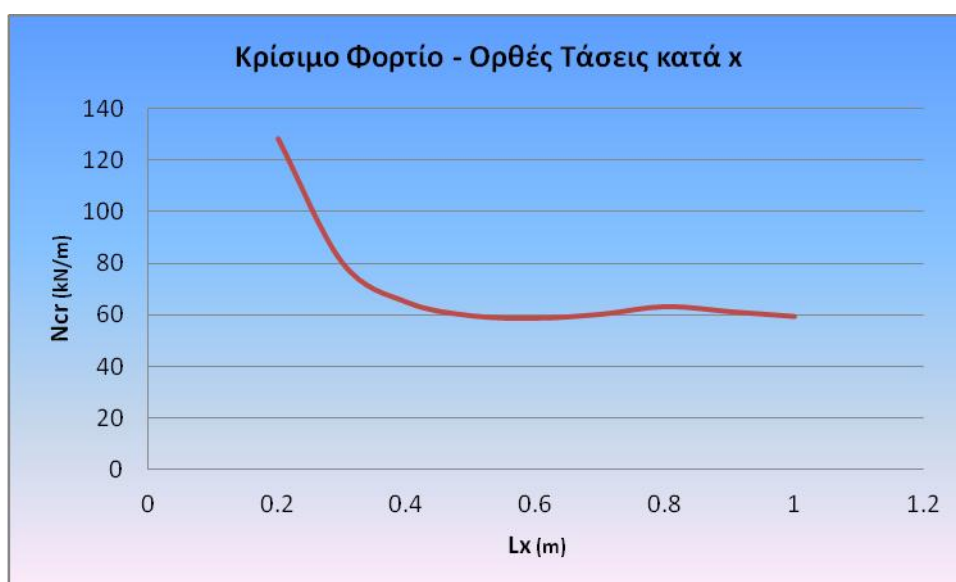


**Σχήμα 4.16** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$

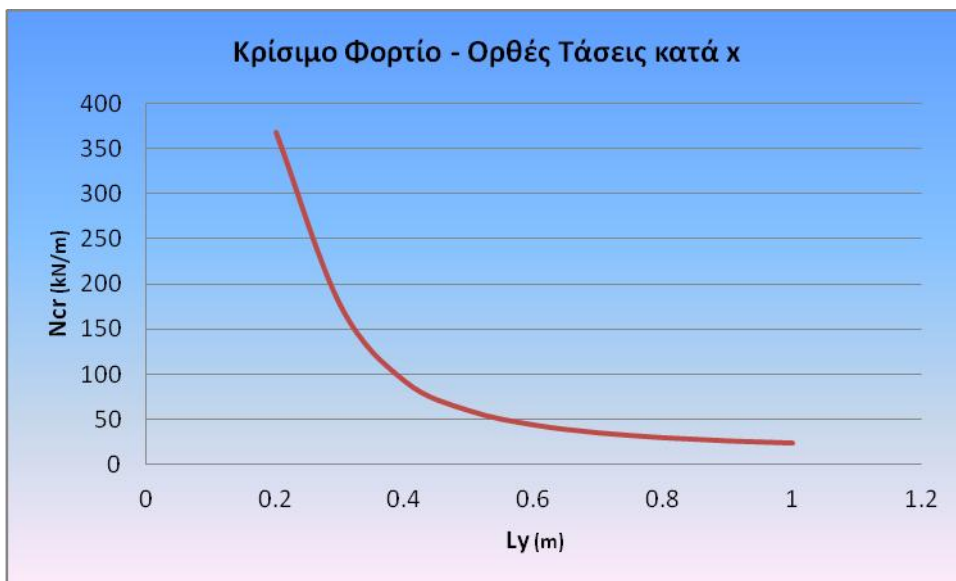


**Σχήμα 4.17** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.18**, **4.19** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης β)  $[45_2/-45_2/0_{12}/-45_2/45_2]$  ισορροπημένου, συμμετρικού.

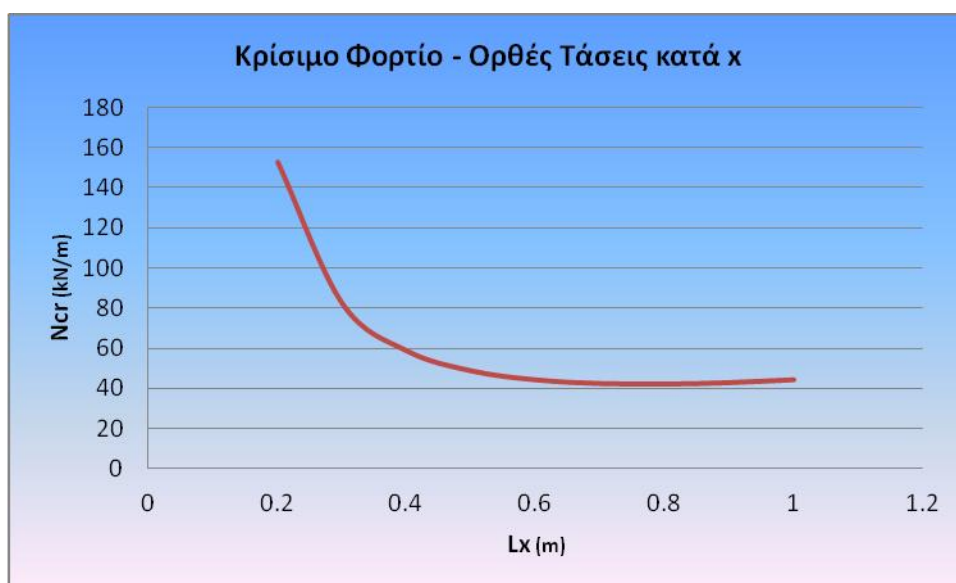


**Σχήμα 4.18** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$



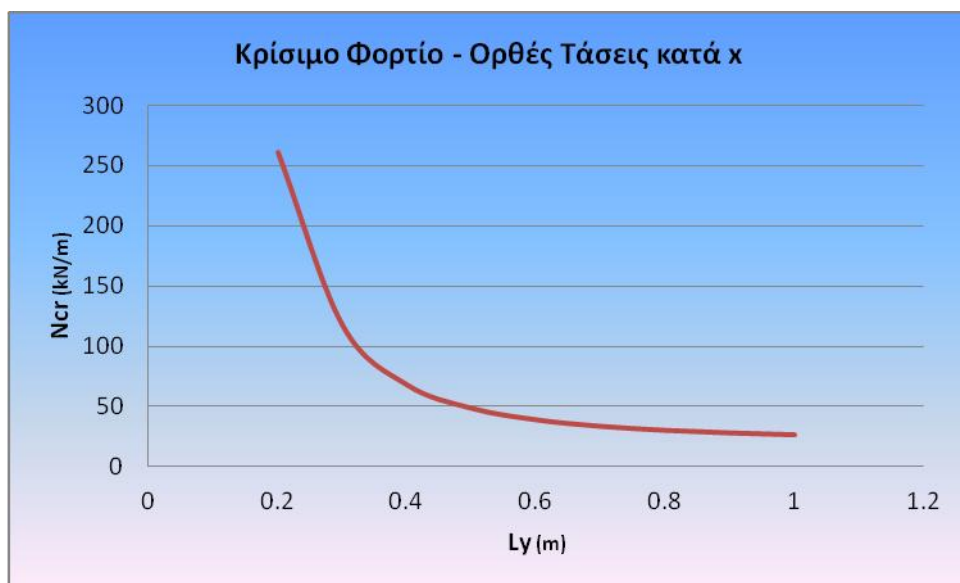
**Σχήμα 4.19** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.20**, **4.21** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης  $\gamma) [-30_4/15_4/0_2]_s$  συμμετρικού



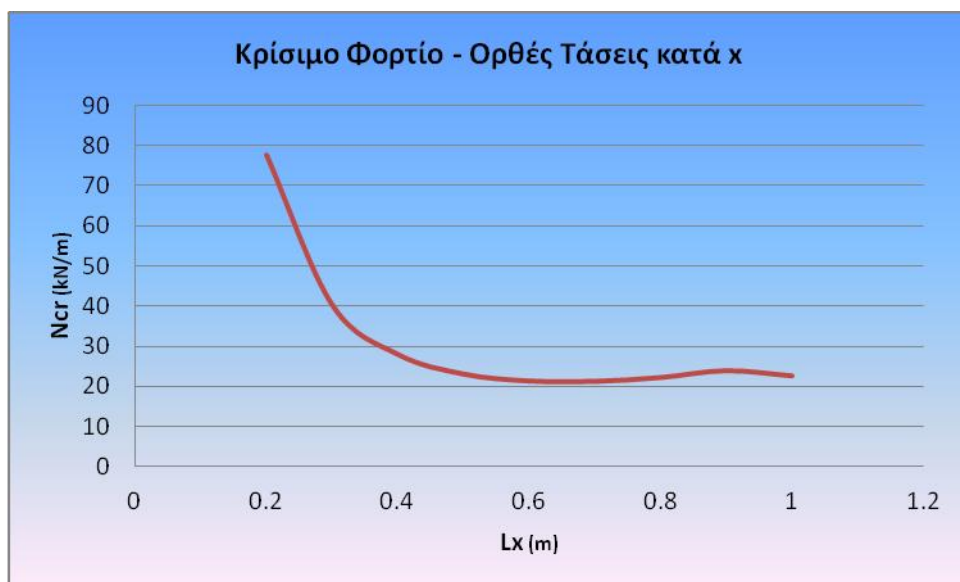
**Σχήμα 4.20** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$



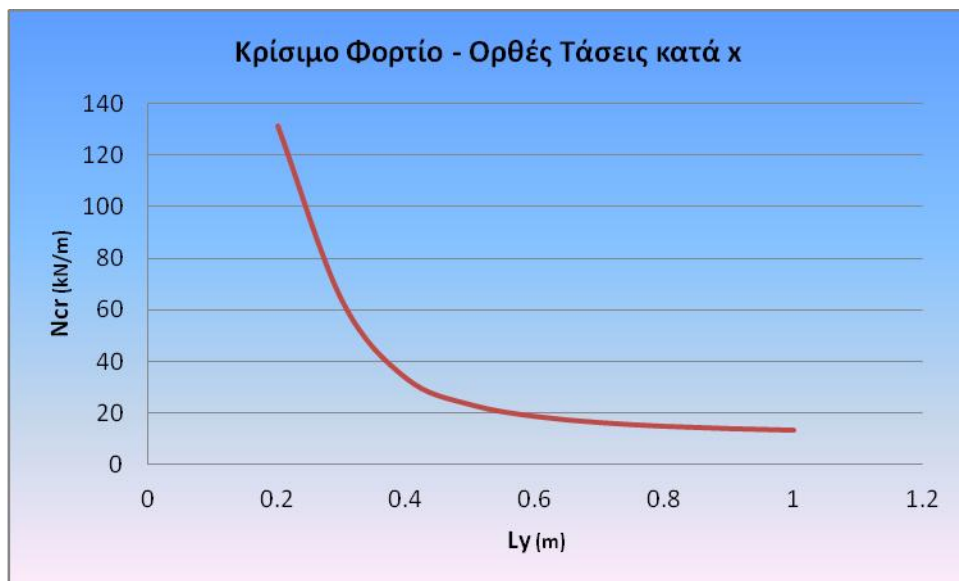


**Σχήμα 4.21** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.22**, **4.23** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης δ)  $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$  σχεδόν ισότροπου συμμετρικού

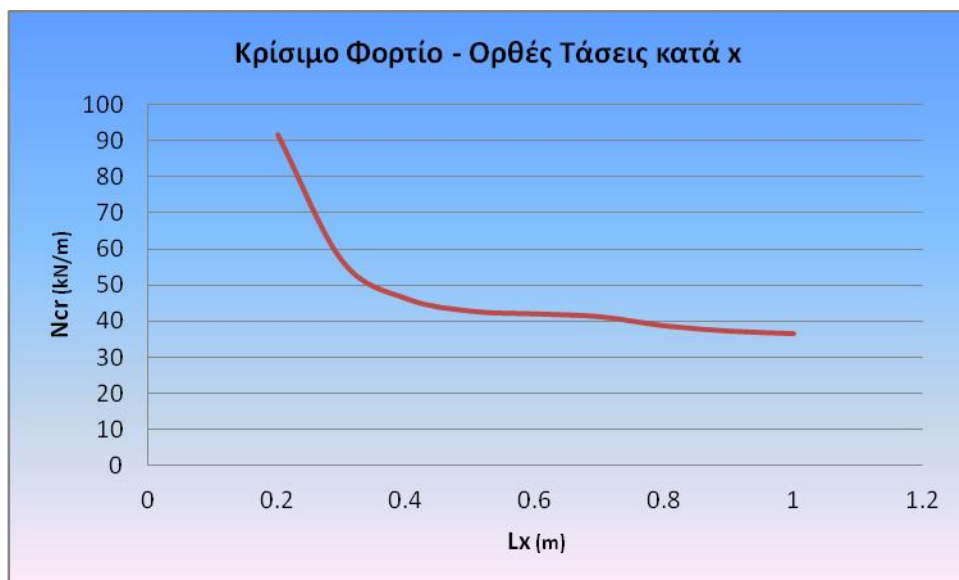


**Σχήμα 4.22** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$

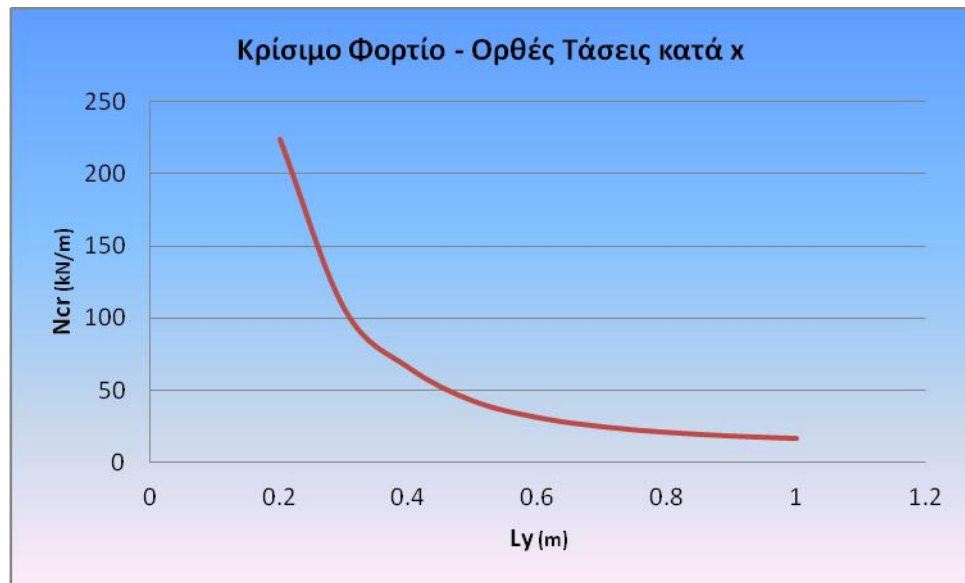


**Σχήμα 4.23** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.24**, **4.25** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης ε)  $[45_6/0_4]_s$  συμμετρικού



**Σχήμα 4.24** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$



**Σχήμα 4.25** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

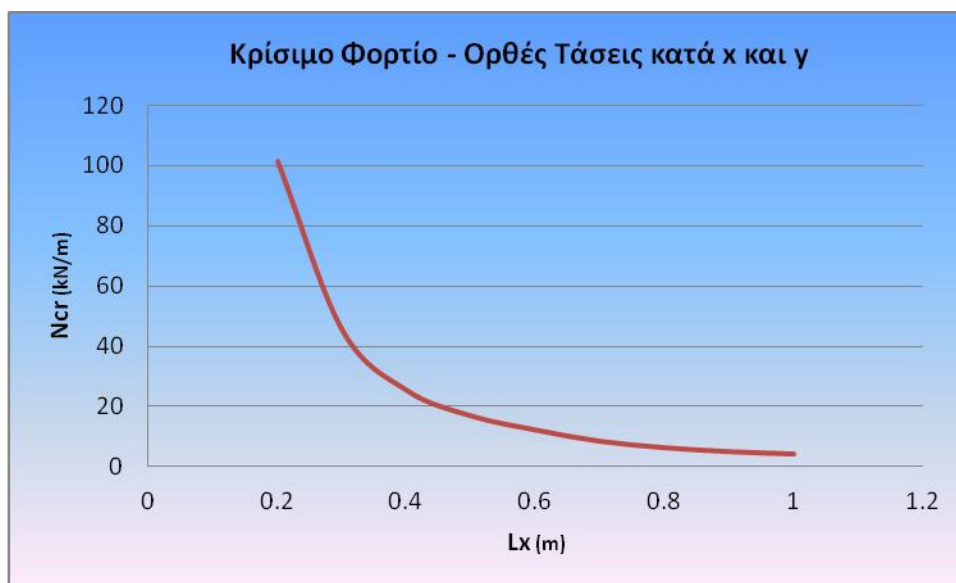
#### 4.4 Θλιπτικές Τάσεις ταυτόχρονα κατά τη διεύθυνση x και y

Στο παρόν υποκεφάλαιο εξετάζονται πλάκες απλά εδραζόμενες με διαστρωματώσεις όπως αυτές έχουν παρουσιασθεί στο κεφάλαιο 3. Κάθε πλάκα φορτίζεται με θλιπτικές τάσεις ταυτόχρονα κατά τη διεύθυνση x και y και βρίσκεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

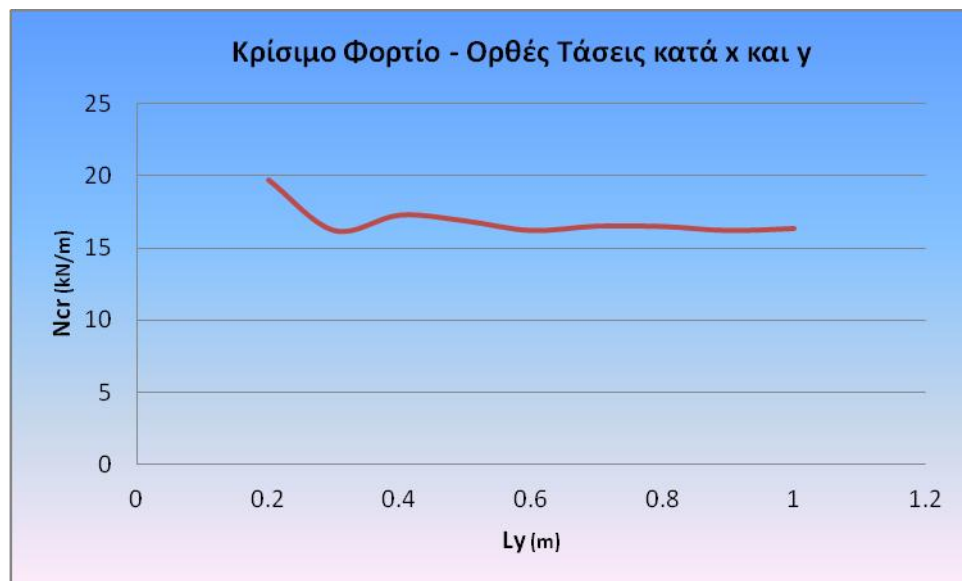
Το πάχος των πλακών είναι  $t = 4\text{mm}$  ενώ τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον πίνακα 3.1 του κεφαλαίου 3. Για κάθε πλάκα γίνονται δύο επιλύσεις όπου κάθε φορά μία από τις διαστάσεις της πλάκας παραμένει σταθερή και ίση με  $0.50\text{ m}$  ενώ η άλλη διάσταση μεταβάλλεται από  $0.20\text{ m}$  έως  $1.00\text{ m}$  και υπολογίζονται τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία λυγισμού. Έπειτα η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου σε σχέση με την διάσταση που κάθε φορά μεταβάλλεται απεικονίζεται σε διάγραμμα. Λόγω της ύπαρξης μόνο θλιπτικών τάσεων στο φορέα οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι θετικές. Έτσι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα που παρήχθησαν από τις επιλύσεις που έγιναν.

Τα σχήματα **4.26**, **4.27** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης α)  $[0_{20}]$  ορθότροπου συμμετρικού.

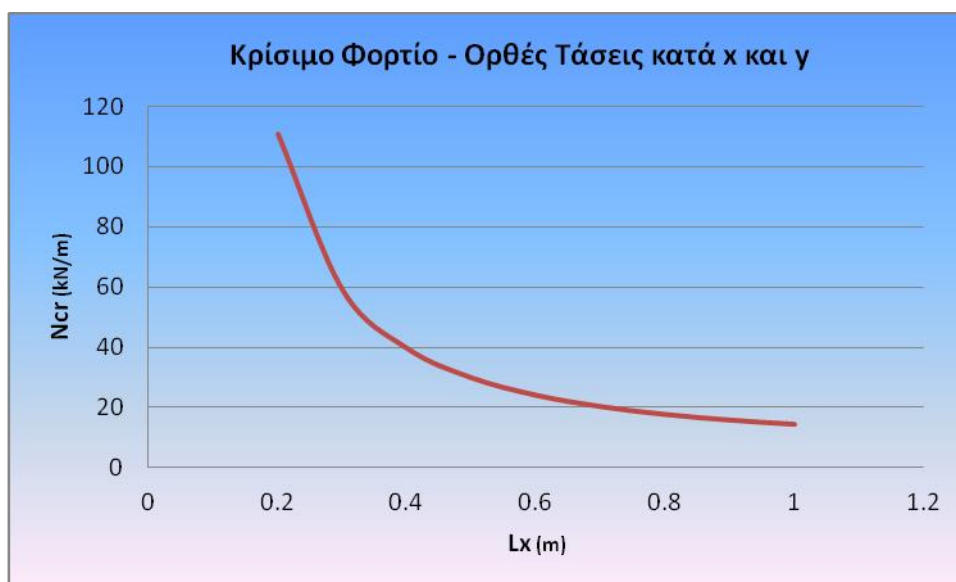


**Σχήμα 4.26** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$

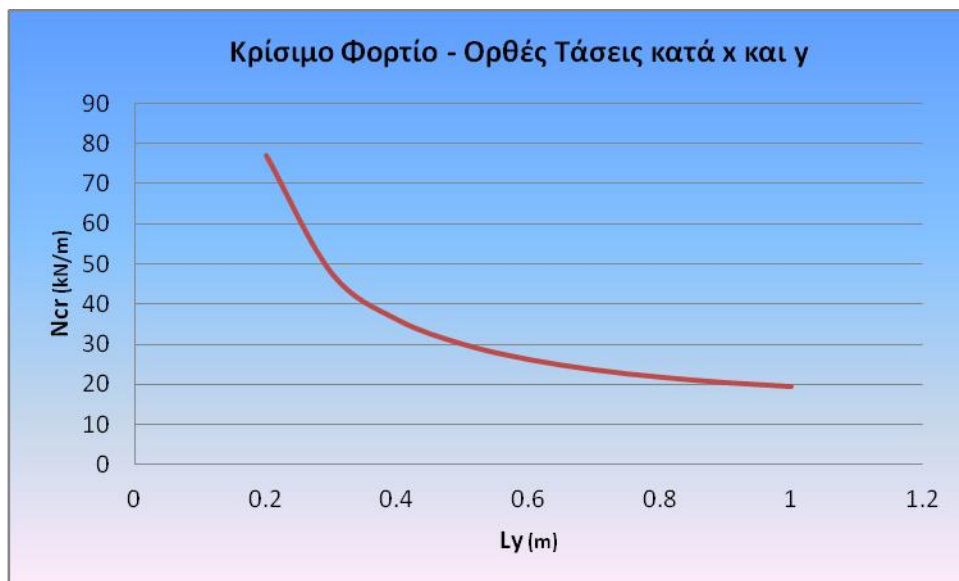


**Σχήμα 4.27** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.28**, **4.29** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης β) [45<sub>2</sub>/-45<sub>2</sub>/0<sub>12</sub>/-45<sub>2</sub>/45<sub>2</sub>] ισορροπημένου, συμμετρικού

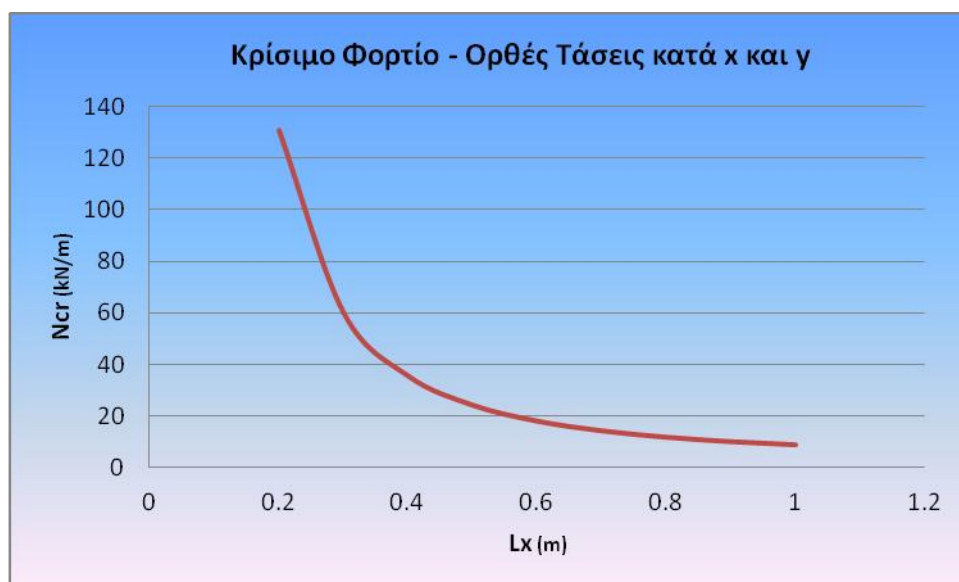


**Σχήμα 4.28** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$

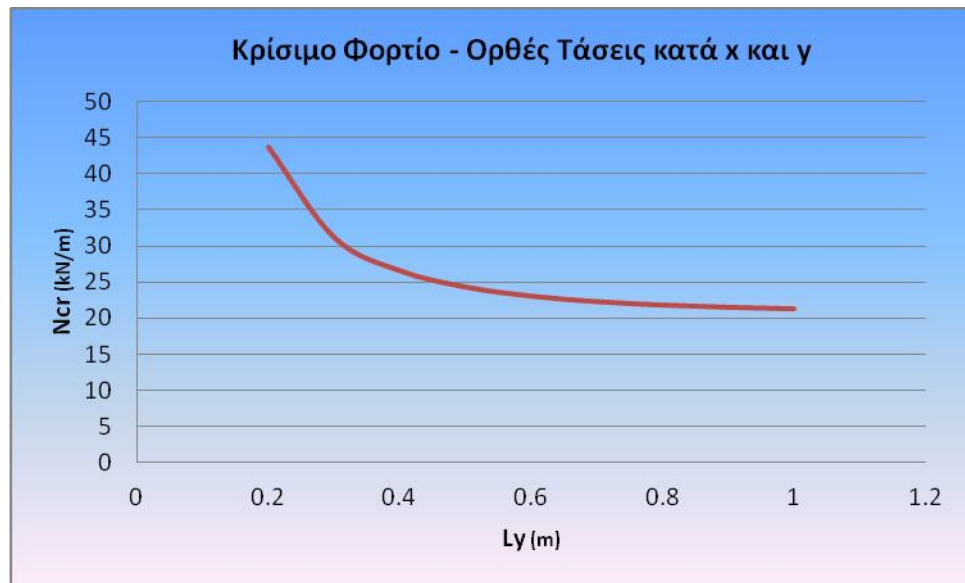


**Σχήμα 4.29** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα **4.30**, **4.31** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης  $\gamma) [-30_4/15_4/0_2]_s$  συμμετρικού.

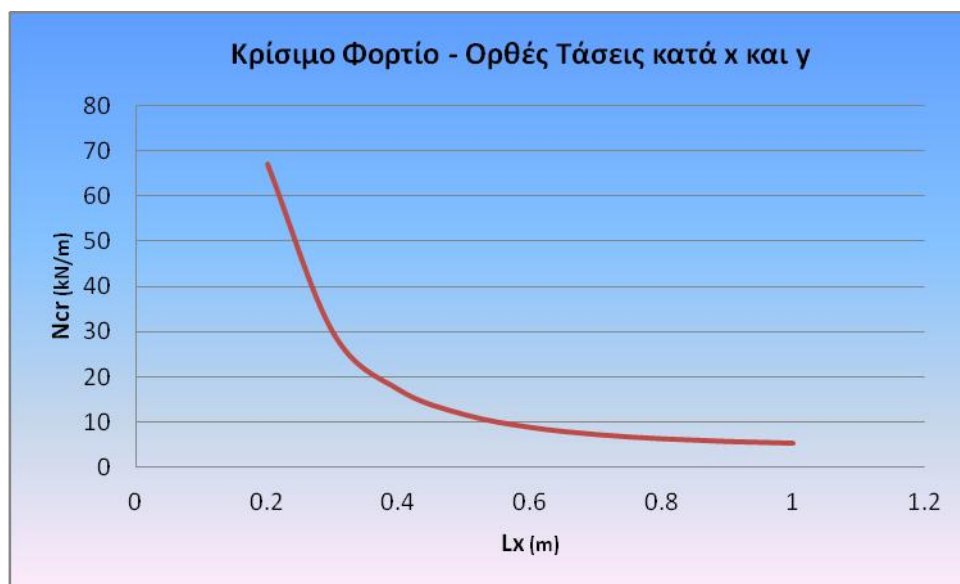


**Σχήμα 4.30** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$

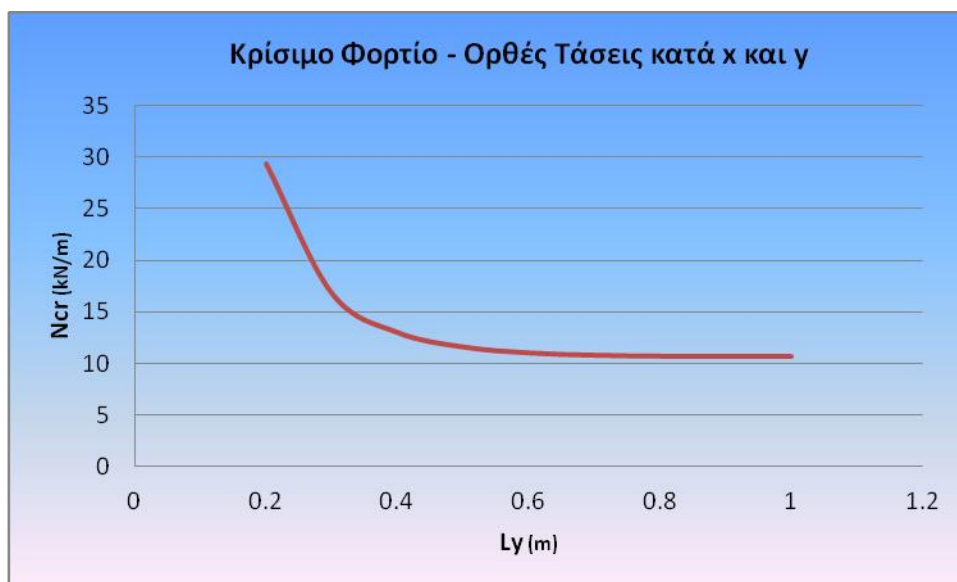


**Σχήμα 4.31** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

Τα σχήματα 4.32, 4.33 αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης δ)  $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$  σχεδόν ισότροπου, συμμετρικού



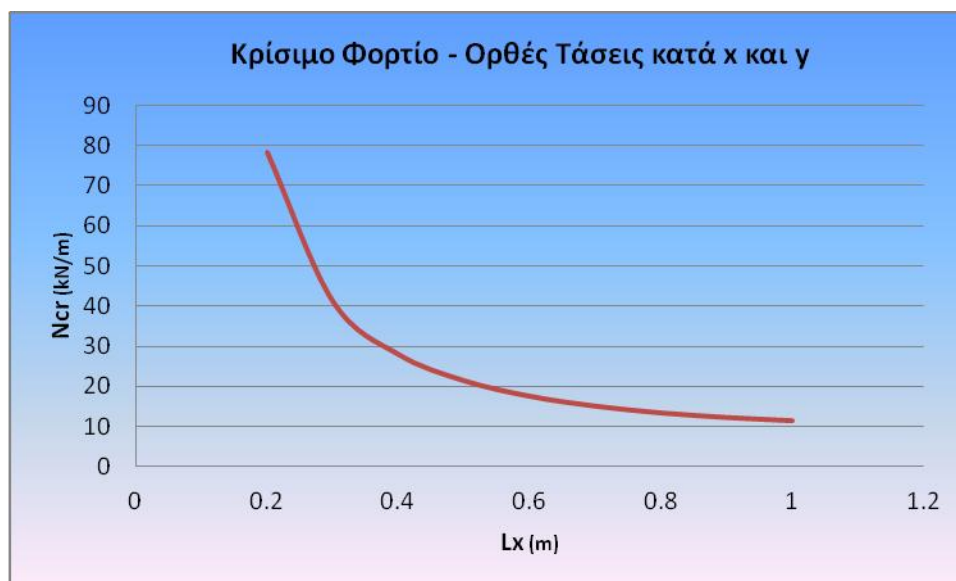
Σχήμα 4.32 Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$



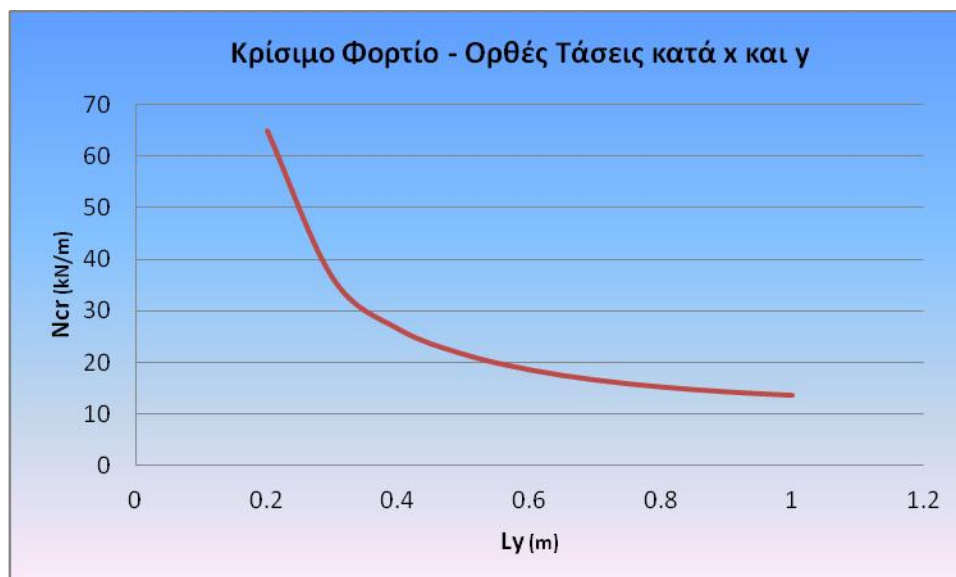
Σχήμα 4.33 Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$



Τα σχήματα **4.34**, **4.35** αφορούν στην περίπτωση του κώδικα διαστρωμάτωσης  $\epsilon) [45_6/0_4]_s$  συμμετρικού



**Σχήμα 4.34** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_x$



**Σχήμα 4.35** Μεταβολή κρίσιμου φορτίου σε συνάρτηση με το μήκος  $L_y$

## 5 Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η κατανόηση της συμπεριφοράς πλακών από σύνθετα υλικά FRP έναντι λυγισμού. Οι πλάκες αυτές είναι απλά εδραζόμενες ενώ αποτελούνται από συμμετρικές διαστρωματώσεις διαφορετικές μεταξύ τους και έχουν πάχος  $t = 4 \text{ mm}$ . Χαρακτηριστικό μέγεθος αποτέλεσε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το οποίο καθορίζει την αντοχή των πλακών έναντι λυγισμού. Ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού οδήγησε τελικά στην εξαγωγή πολλών χρήσιμων συμπερασμάτων. Για να πραγματοποιηθεί η ανάλυση των πλακών αναπτύχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB με βάση τη γραμμική ελαστική θεωρία λυγισμού. Οι πλάκες που αναλύθηκαν είχαν γενικά μεταβαλλόμενες διαστάσεις και οι περιπτώσεις φόρτισης ήταν τρεις :

- α) Συνδυασμός θλιπτικών και διατμητικών τάσεων,
- β) Μόνο θλιπτικές τάσεις κατά τη διεύθυνση  $x$  της πλάκας και
- γ) Θλιπτικές τάσεις κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  της πλάκας ταυτόχρονα

Ακολούθως με βάση τα κρίσιμα φορτία παρήχθησαν διαγράμματα που αποτυπώνουν καλύτερα τα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση φόρτισης α) σκοπός ήταν ο υπολογισμός για οποιοδήποτε συνδυασμό θλιπτικών και διατμητικών τάσεων στο φορέα του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Για το λόγο αυτό έγινε η παραδοχή ότι ισχύει για τα υπό εξέταση υλικά συγκεκριμένος νόμος, ο οποίος ισχύει κανονικά για ισότροπα υλικά, που συνδέει τα τυχαία κρίσιμα φορτία λυγισμού με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για θλιπτικές τάσεις μόνο στο φορέα και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διατμητικές τάσεις μόνο στο φορέα.

Παρότι τα συγκεκριμένα υλικά που εξετάστηκαν δεν είναι ισότροπα, η εν λόγω κατανομή ισχύει κατά πολύ καλή προσέγγιση, με συνέπεια τα αποτελέσματα που ελήφθησαν να θεωρούνται αξιόπιστα και σε ικανοποιητικό βαθμό. Με αυτόν τον τρόπο δεν χρειάζεται κάθε φορά νέα μελέτη και ανάλυση των συγκεκριμένων φορέων για αυτό το είδος φόρτισης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα διαγράμματα που εξήχθησαν και να ληφθούν τα αποτελέσματα έτοιμα.

Ένας διαφορετικός λόγος χρήσης των συγκεκριμένων διαγραμμάτων θα μπορούσε να είναι και η επαλήθευση αποτελεσμάτων που ελήφθησαν με κάποια άλλη μέθοδο ανάλυσης. Για αυτό το είδος φόρτισης οι πλάκες που αναλύθηκαν είχαν σταθερή σε μήκος τη διάσταση που είναι κάθετη στη διεύθυνση των θλιπτικών τάσεων που ασκήθηκαν, δηλαδή  $L_y = 0.50 \text{ m}$  και ξεκίνησαν από τετραγωνικές διαστάσεων  $L_x = L_y = 0.50 \text{ m}$ , στη συνέχεια οι διαστάσεις έγιναν  $L_x = 0.75 \text{ m}$ ,  $L_y = 0.50 \text{ m}$  και  $L_x = 1.00 \text{ m}$ ,  $L_y = 0.50 \text{ m}$ .

Γενικώς για τις τετραγωνικές πλάκες αποδείχθηκε ότι η αντοχή των πλακών έναντι λυγισμού για εφαρμογή μόνο διατμητικού φορτίου ήταν πάντα μεγαλύτερη σε σχέση με την εφαρμογή μόνο θλιπτικού φορτίου. Παρόλα αυτά καθώς η διάσταση  $L_x$  αυξάνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των πλακών για καταπόνηση μόνο με διατμητικές τάσεις μειώνεται αρκετά έως ότου το  $L_x$  γίνει διπλάσιο από το  $L_y$ . Αντίθετα δεν υπήρχε μεγάλη διακύμανση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού για καταπόνηση μόνο με ορθές τάσεις κατά τη διεύθυνση  $x$ , παρά το ότι η διάσταση  $L_x$  αυξανόταν, όπου οι διαφορές ήταν πολύ μικρές της τάξεως μερικών  $kN/m$ , εκτός μόνο από την περίπτωση με κώδικα διαστρωμάτωσης  $\alpha$ ).

Όσον αφορά στις φορτίσεις  $\beta$ ) και  $\gamma$ ) εξετάστηκαν πλάκες οι οποίες κάθε φορά είχαν μια από τις δύο πλευρές τους σταθερή και ίση με  $0.50m$  ενώ η άλλη πλευρά μεταβαλλόταν από  $0.20 m$  έως  $1.00 m$ . Ένα από τα πιο σημαντικά συμπεράσματα είναι ότι από τη στιγμή που η πλάκα γίνει τετραγωνική και έπειτα, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αρχίζει και σταθεροποιείται. Από εκείνο το σημείο μέχρι η διάσταση που μεταβάλλεται να γίνει διπλάσια από τη σταθερή διάσταση, ο ρυθμός μεταβολής του κρίσιμου φορτίου είναι πολύ μικρός, σε κάποιες περιπτώσεις σχεδόν μηδενικός. Κάθε γραφική παράσταση λοιπόν παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη. Η μεγάλη πτώση στην αντοχή έναντι λυγισμού εντοπίζεται από τη στιγμή που η πλάκα ξεκινά με διάσταση  $0.20 m$  μέχρι να γίνει τετραγωνική στα  $0.50 m$ . Μέχρι τότε το κρίσιμο φορτίο μεταβάλλεται δραματικά, όμως στη συνέχεια αρχίζει και σταθεροποιείται έως ότου η μεταβαλλόμενη διάσταση διπλασιαστεί.

Κατά τη φόρτιση με θλιπτικές τάσεις σε μία διεύθυνση, τη διεύθυνση  $x$ , συνήθως παρατηρείται εντονότερη μείωση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού στην περίπτωση όπου  $L_x = 0.50 m$  σταθερό και  $L_y$  μεταβάλλεται. Σε αυτήν την περίπτωση το κρίσιμο φορτίο συνεχίζει να ακολουθεί πτωτική πορεία έστω με μικρότερο ρυθμό μεταβολής ακόμα και αφού η πλάκα γίνει τετραγωνική και η διάσταση συνεχίσει να αυξάνεται. Τελικά το κρίσιμο φορτίο καταλήγει να είναι μικρότερο για  $L_x = 0.50 m$   $L_y = 1.00 m$  παρά για  $L_x = 1.00 m$  και  $L_y = 0.50 m$ . Αυτό δεν ισχύει μόνο για τον κώδικα διαστρωμάτωσης  $\alpha$ ). Γενικώς σε αυτήν την περίπτωση φόρτισης μεγαλύτερες μεταβολές στο κρίσιμο φορτίο παρατηρούνται όταν μεταβάλλεται το  $L_y$  με το  $L_x$  σταθερό και όχι όταν συμβαίνει το αντίθετο.

Για φόρτιση με θλιπτικές τάσεις κατά  $x$  και  $y$  ταυτόχρονα, όπως ήταν αναμενόμενο η αντοχή των πλακών για τις αντίστοιχες διαστάσεις είναι μικρότερη. Αυτό αναμενόταν, αφού πλέον οι πλάκες καταπονούνται και κατά τις 2 διευθύνσεις, με αποτέλεσμα η αντοχή τους έναντι λυγισμού να είναι φανερά μειωμένη.

Πάντα η θλιπτική καταπόνηση σε 2 διευθύνσεις σε σχέση με την θλιπτική καταπόνηση σε μία διεύθυνση για την ίδια πλάκα οδηγεί σε μικρότερο κρίσιμο φορτίο. Σε αυτήν την περίπτωση φόρτισης όταν το  $L_y$  είναι σταθερό και το  $L_x$  μεταβάλλεται από  $0.20 m$  έως  $1.00 m$  το κρίσιμο φορτίο παρότι μικρότερο στην αρχή διαφέρει κατά ένα μικρό ποσοστό σε σχέση με το αντίστοιχο για φόρτιση μόνο κατά τη μία διεύθυνση. Όσο

όμως το  $L_x$  αυξάνεται η διαφορά στις τιμές των κρίσιμων φορτίων αρχίζει και γίνεται μεγαλύτερης τάξης μεγέθους. Αντίθετα, όταν το  $L_y$  μεταβάλλεται και το  $L_x$  είναι σταθερό τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία για φορτίσεις με θλιπτικές τάσεις σε μία και δύο διευθύνσεις πολύ πριν η πλάκα γίνει τετραγωνική διαφέρουν σημαντικά. Όσο όμως το  $L_y$  αυξάνεται και η πλάκα γίνεται από τετραγωνική έως διπλάσια, η τάξη μεγέθους της διαφοράς στα κρίσιμα φορτία μειώνεται.

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά στη φόρτιση με θλιπτικές τάσεις κατά τη μία διεύθυνση : Μεταβολή  $L_x$  από 0.20 m έως 1.00 m :

Τη μεγαλύτερη μεταβολή στο κρίσιμο φορτίο για μεταβολή του  $L_x$  με  $L_y$  σταθερό παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α), όπου το  $N_{cr}$  για  $L_x = 0.20$  m και  $L_y = 0.50$  m ήταν 201.29 kN/m ενώ για  $L_x = 1.00$  m και  $L_y = 0.50$  m το  $N_{cr}$  ήταν 21.06 kN/m, δηλαδή έχασε περίπου το 90% της αντοχής του.

Τη μικρότερη μείωση παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης β), όπου για  $L_x = 0.20$  m και  $L_y = 0.50$  m το  $N_{cr}$  ήταν 128.33 kN/m και για  $L_x = 1.00$  m και  $L_y = 0.50$  m μειώθηκε στο 59.64 kN/m, δηλαδή μειώθηκε κατά 50% περίπου.

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_x = 0.20$  m  $L_y = 0.50$  m ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης α) με  $N_{cr} = 201.29$  kN/m ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης δ) με  $N_{cr} = 77.62$  kN/m.

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_x = 1.00$  m  $L_y = 0.50$  m ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 59.64$  kN/m ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α) με  $N_{cr} = 21.06$  kN/m.

Μεταβολή  $L_y$  από 0.20 m έως 1.00 m :

Τη μεγαλύτερη μεταβολή στο κρίσιμο φορτίο για μεταβολή του  $L_y$  με  $L_x$  σταθερό παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης β), όπου το  $N_{cr}$  για  $L_x = 0.50$  m και  $L_y = 0.20$  m ήταν 368.56 kN/m ενώ για  $L_x = 0.50$  m και  $L_y = 1.00$  m το  $N_{cr}$  ήταν 24.21 kN/m, δηλαδή έχασε περίπου το 94% της αντοχής του. Τη μικρότερη μείωση παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α), όπου για  $L_x = 0.50$  m και  $L_y = 0.20$  m το  $N_{cr}$  ήταν 142.75 kN/m και για  $L_x = 0.50$  m και  $L_y = 1.00$  m μειώθηκε στο 32.74 kN/m, δηλαδή μειώθηκε κατά 77% περίπου.

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_y = 0.20$  m  $L_x = 0.50$  m ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 368.56$  kN/m ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης δ) με  $N_{cr} = 131.11$  kN/m.

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_y = 1.00\text{ m}$   $L_x = 0.50\text{ m}$  ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης α) με  $N_{cr} = 32.74\text{ kN/m}$  ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης δ) με  $N_{cr} = 13.33\text{ kN/m}$ . Για την τετραγωνική πλάκα με διαστάσεις  $L_x = L_y = 0.50\text{ m}$  το μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 59.90\text{ kN/m}$  και το μικρότερο ο κώδικας διαστρωμάτωσης δ) με  $23.16\text{ kN/m}$ .

Όσον αφορά στη φόρτιση με θλιπτικές τάσεις και κατά τις δύο διευθύνσεις  $x$  και  $y$  : Μεταβολή  $L_x$  από  $0.20\text{ m}$  έως  $1.00\text{ m}$  :

Τη μεγαλύτερη μεταβολή στο κρίσιμο φορτίο για μεταβολή του  $L_x$  με  $L_y$  σταθερό παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α), όπου το  $N_{cr}$  για  $L_x = 0.20\text{ m}$  και  $L_y = 0.50\text{ m}$  ήταν  $101.25\text{ kN/m}$  ενώ για  $L_x = 1.00\text{ m}$  και  $L_y = 0.50\text{ m}$  το  $N_{cr}$  ήταν  $4.21\text{ kN/m}$ , δηλαδή έχασε περίπου το 96% της αντοχής του.

Τη μικρότερη μείωση παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης ε), όπου για  $L_x = 0.20\text{ m}$  και  $L_y = 0.50\text{ m}$  το  $N_{cr}$  ήταν  $78.16\text{ kN/m}$  και μειώθηκε για  $L_x = 1.00\text{ m}$  και  $L_y = 0.50\text{ m}$  στο  $11.54\text{ kN/m}$ , δηλαδή μειώθηκε κατά 85% περίπου.

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_x = 0.20\text{ m}$   $L_y = 0.50\text{ m}$  ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης γ) με  $N_{cr} = 130.90\text{ kN/m}$  ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης δ) με  $N_{cr} = 66.90\text{ kN/m}$ . Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_x = 1.00\text{ m}$   $L_y = 0.50\text{ m}$  ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 14.58\text{ kN/m}$  ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α) με  $N_{cr} = 4.21\text{ kN/m}$ .

Μεταβολή  $L_y$  από  $0.20\text{ m}$  έως  $1.00\text{ m}$  :

Τη μεγαλύτερη μεταβολή στο κρίσιμο φορτίο για μεταβολή του  $L_y$  με  $L_x$  σταθερό παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης ε), όπου το  $N_{cr}$  για  $L_x = 0.50\text{ m}$  και  $L_y = 0.20\text{ m}$  ήταν  $64.94\text{ kN/m}$  ενώ για  $L_x = 0.50\text{ m}$  και  $L_y = 1.00\text{ m}$  το  $N_{cr}$  ήταν  $13.54\text{ kN/m}$ , δηλαδή έχασε περίπου το 79% της αντοχής του.

Τη μικρότερη μείωση παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α), όπου για  $L_x = 1.00\text{ m}$  και  $L_y = 0.20\text{ m}$  το  $N_{cr}$  ήταν  $19.69\text{ kN/m}$  και για  $L_y = 1.00$  και  $L_x = 0.50\text{ m}$  μειώθηκε στο  $16.33\text{ kN/m}$ , δηλαδή μειώθηκε κατά 17% περίπου. Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_y = 0.20\text{ m}$   $L_x = 0.50\text{ m}$  ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 77.14\text{ kN/m}$  ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης α) με  $N_{cr} = 19.69\text{ kN/m}$ .

Η πλάκα που παρουσίασε τη μεγαλύτερη αντοχή έναντι λυγισμού σε διαστάσεις  $L_y = 1.00\text{ m}$   $L_x = 0.50\text{ m}$  ήταν αυτή με κώδικα διαστρωμάτωσης γ) με  $N_{cr} = 21.24\text{ kN/m}$  ενώ τη μικρότερη αντοχή η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης δ) με  $N_{cr} = 10.66\text{ kN/m}$ . Για την τετραγωνική πλάκα με διαστάσεις  $L_x = L_y = 0.50\text{ m}$  το μεγαλύτερο

κρίσιμο φορτίο λυγισμού παρουσίασε η πλάκα με κώδικα διαστρωμάτωσης β) με  $N_{cr} = 29.95 \text{ kN/m}$  και το μικρότερο ο κώδικας διαστρωμάτωσης δ) με  $11.58 \text{ kN/m}$ .

## Βιβλιογραφία

1. Διαμαντόπουλος Σ., «Τοπικός Λυγισμός Ελασμάτων από Σύνθετα Υλικά με και χωρίς Ενίσχυση», Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Αθήνα 2013.
2. Πεπόνης Κ., «Κύρτωση Χαλύβδινων και Ορθότροπων Πλακών από Ορθές και Διατμητικές Τάσεις», Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Αθήνα 2015.
3. Ραυτογιάννης Ι., «Σύνθετα Υλικά», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2013.
4. Φελλούρης Α., «Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία», Αθήνα 2009.
5. Kollar L., Springer G., “Mechanics of Composite Structures”, Cambridge 2003.
6. Kuncicky D., “MATLAB Programming”, Prentice Hall, 2003.
7. Van Loan C., Daisy Fan K., «Το MATLAB στην Υπολογιστική Επιστήμη και Τεχνολογία», Da Vinci M.E.Π.Ε., 2012.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB

## 1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ ΘΛΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΦΟΡΕΑ

```
%diary paradigma115.txt;
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
format short;
```

```
% Kollar-Springer page 81 thickness and page 84 equations 3.58!!!!!!
```

```
% The D matrix of the frp with thickness h=2mm , D2mm , is given in page 84 of Kollar-Springer
```

```
%D=[45.3 19.52 0;19.52 25.26 0;0 0 20.62]; % paradigma sel 115 kollar
```

```
%D=[99.25 1.94 0;1.94 6.47 0;0 0 3.03]; % O20
```

```
%D=[45.30 19.52 4.45;19.52 25.26 4.45;4.45 4.45 20.62]; % 45 2
```

```
%D=[65.42 16.29 -18.93;16.29 11.60 -7.74;-18.93 -7.74 17.39]; % -3004
```

```
%D=[34.61 4.58 3.3;4.58 12.34 3.34;3.34 3.34 5.14]; % O2452
```

```
D=[34.84 22.93 21.71;22.93 28.90 21.71;21.71 21.71 24.02]; % 45604
```

```
% for thickness h=4mm the matrix D has to be multiplied by  $2^3 = 8$ 
```

```
D=8*D;
```

```
D11=D(1,1); % N*m
```

```
D22=D(2,2); % N*m
```

```
D12=D(1,2); % N*m
```

```
D66=D(3,3); % N*m
```

```
D16=D(1,3); % N*m
```

```
D26=D(2,3); % N*m
```



```

I=8; % o pinakas G einai diastaseon I*J   (na to valo 6)
J=8; % o pinakas G einai diastaseon I*J

G=zeros(I,J);
A=zeros(I,J);
b=zeros(I,J);
r=zeros(I,J);
KrisimoFortio=zeros(5,1); % o pinakas pou kratai ta krisima fortia kathe sindiasmou fortisis Nx kai
%Nxy
SimiaNx=zeros(5,1); % simia tou diagrammatos gia tis fortisis Nx
SimiaNxy=zeros(5,1); % simia tou diagrammatos gia tis fortisis Nxy

figure; % it creates a new figure window
CurrentSubplot=0; % number of current plot
% dimensions of the plate

% logosPlevron = Lx/Ly = 1.00,1.50,2.00 , me Ly=0.50m
Ly=0.50; % timi ekkinesis 0.5 m
for logosPlevron=1.0:0.5:2.0
    Lx=logosPlevron*Ly; % se m

    CurrentSubplot=CurrentSubplot+1;
    % forces inside the plate

    % Nx metavalletai apo 1.00 eos 0.00 kai antistoixa Nxy apo 0.00 eos 1.00
    Ny0=0;
    % arithmosSindiasmou== 1 gia Nx0=1 kai Nxy0=1   kai ==2 gia Nx=0 kai Nxy=1
    for arithmosSindiasmou=1:2

        if(arithmosSindiasmou==1)
            Nx0=1;
            Nxy0=0;
        else

```

```

Nx0=0;
Nxy0=1;
end

```

```

fprintf('\n\nGia Lx=%f kai Ly=%f kai fortia Nx0=%f kai Nxy0=%f : \n\n',Lx,Ly,Nx0,Nxy0);

```

% ypologismos mitroou rij apo Table 4.1 selida 102 vivliou kollar

```

for indexi=1:(I*J)
    for indexj=1:(I*J)
        if mod(indexi-indexj,2)==0
            r(indexi,indexj)=0;
        else
            r(indexi,indexj)=1/pi*(2*indexi/(indexi^2-indexj^2));
        end
    end
end
end

```

```

%         fprintf('\n\nTo mitroo r[] einai:\n\n');
%         disp(r);

```

% ypologismos stoixion pinaka G[] apo Table 4.1 selida 102 vivliou kollar

```

fores=0; % arithmos vroxi pou ekteleitai ston pio kato kodika me ta tessera for
for indexi=1:I
    for indexj=1:J

        k=(indexi-1)*J+indexj;

        for m=1:I

```

```

for n=1:J

    fores=fores+1;

%    fprintf('\nEPANALHPSI NO:%d\n',fores);

    l=(m-1)*J+n;

% to delta_lk apo pinaka sel.102 tou kollar
    if k==l
        delta=1;
    else
        delta=0;
    end

% G1,G2,G3 voithitikes metavlites oi opies prostithentai gia na dosun to stixio G(i,j) , den
% xrisimevun alou , einai mono gia aplopiisi tis sxesis pou dini to G(k,l)

G1=1/4*Lx*Ly*pi^4*(D11*(indexi/Lx)^4+2*(D12+2*D66)*(indexi/Lx)^2*(indexj/Ly)^2+D22*(indexj/Ly)^4)*delta;

G2=(-
2)*Lx*Ly*(pi^4)*D16*(((indexi/Lx)^2)*(m/Lx)*(n/Ly)*r(indexi,m)*r(indexj,n)+((m/Lx)^2)*(indexi/Lx)*
x)*(indexj/Ly)*r(m,indexi)*r(n,indexj));

G3=(-
2)*Lx*Ly*(pi^4)*D26*((indexj/Ly)^2*(m/Lx)*(n/Ly)*r(indexi,m)*r(indexj,n)+(n/Ly)^2*(indexi/Lx)*(
indexj/Ly)*r(m,indexi)*r(n,indexj));

G(k,l)=G1+G2+G3;

% b1,b2 voithitikes metavlites oi opies prostithentai gia na dosun to stixio b(i,j) , den xrisimevun
% alou , einai mono gia aplopiisi tis sxesis pou dini to b(k,l) sti selida 114

b1=1/4*Lx*Ly*pi^2*(Nx0*(indexi/Lx)^2+Ny0*(indexj/Ly)^2)*delta;

b2=Lx*Ly*pi^2*Nxy0*((indexi/Lx)*(n/Ly)*r(m,indexi)*r(indexj,n)+(indexj/Ly)*(m/Lx)*r(indexi,m)*r
(n,indexj));

b(k,l)=b1+b2;

%    fprintf('b(%d,%d)=%f',k,l,b(k,l));

```

```

%
%           fprintf('\ntelos %dtis epanalipsis\n\n',fores);
%           end
%           end
%           end
end

```

```

fprintf('arithmos ektelesmenon vroxon = sinolikos arithmos epanalipseon = %d\n\n',fores);

```

```

%           fprintf('\n\nO pinakas G[] telika einai:\n\nG =\n\n');
%           disp(G);
%
%           fprintf('\n\nO pinakas b[] telika einai:\n\nb =\n\n');
%           disp(b);

```

```

% euresi antistrofou pinaka tou b[] , inverse matrix , kai emfanisi tou stin othoni
%           fprintf('\n\nO antistrofos pinakas tou b einai  $b^{-1}$  :\n\nbInverse =\n\n');
%           bInverse=inv(b);
%           disp(bInverse);

```

```

% euresi tou pinaka bInverse[]*G[] kai emfanisi tou stin othoni
%           fprintf('\n\nTo zitoumeno mitroo  $A=bInverse[]*G[]$  einai :\n\nA =\n\n');
%           A=bInverse*G;
%           disp(A);

```

```

% idiotimes(eigenvalues) tou pinaka  $A=bInverse*G$  me tin entoli eig(A)
fprintf('\n\nOi idiotimes se kN/m tou pinaka  $A=bInverse*G$  einai :\n\neigenvaluesA = lamda =\n\n');

```

```

%           eigenvaluesA=eig(A); % se N/m
%           disp(eigenvaluesA);

```

```

%           fprintf('\n\nGia na exo to apotelesma se kN/m exo oti lamda =\n\n');

```

```

        lamda=10^(-3)*eigenvaluesA;
%         disp(lamda);
string3='IDIOTIMES';
fprintf('\n%25s',string3);
for indexi=1:length(lamda)
    fprintf('\n%15.4f',lamda(indexi));
end

```

% formatted output gia to mitroo idiotimon , opou eno to matlab

% epistrefei arxika monodiastato pinaka me tis idiotimes aftos istera metatrepetai se disdiastato

%epitides gia na fainetai

% to krisimo fortio se poio i,j antistoixei kai na fainontai poses epifaneies kirtosis sximatizontai

%tote.

```

for indexi=1:I
    for indexj=1:J
        l=(indexi-1)*J+indexj;
        LAMDA(indexi,indexj)=lamda(l);
    end
end

fprintf('\n\nLAMDA(I,J)=\n');
for indexi=1:I
    fprintf('\n');
    for indexj=1:J
        fprintf('%15.4f',LAMDA(indexi,indexj));
    end
end
end

```

```

% euresi krisimou fortiou meso euresis elaxistis idiotimis tou mitroou lamda

if (Nx0==0 & Ny0==0)

    % An Nx0==0 & Ny0==0 tote exo mono Nxy0, ara exo kathari diatmisi , tote exo kai
    %arnitikes idiotimes, aftes simvolizun tin antitheti katefthinsi apo tin askisi tou fortiou,
    % dld ligismo stin ali katefthinsi, to krisimo fortio tote einai to kata apoliti timi mikrotero.
    % Tote ston pinaka lamda pou exo tis idiotimes tou provlimatos, oses einai arnitikes tis
    %kano thetikis kai gia tin evresi tis mikroteris thetikis pleon akoloutho tin gnosti diadikasia

    fprintf('\n\nKathari Diatmisi-Mono Diatmitikes Taseis\n');

    for indexi=1:(I*J)
        if lamda(indexi)<0
            lamda(indexi)=lamda(indexi)*(-1);
        end
    end

    minlamda=lamda(1);
    for indexi=2:(I*J)
        if (lamda(indexi)<minlamda)
            minlamda=lamda(indexi);
        end
    end

    else

    % Afou exo oposdipote orthes taseis, mpori na exo sindiasmo me diatmitikes ala mpori kai oxi,
    %tote den mporo na dextho arnitikes idiotimes giati den exoun noima, afou se periptosi
    % antithetis katefthinsis ton askoumenon dinameon den exo pia thlipsi ala efelkismo. Opote
    %metaksi ton thetikon idiotimon mono tha psakso tin mikroteri!!!! kai oxi genikos tin
    % kata apoliti timi mikroteri i opia mpori na einai kai arnitiki!!! Vevea otan exo mono orthes
    %taseis kai katholou diatmitikes oi idiotimes einai aparetita thetikis

```

```

% Tropos evresis : theto tin proti timi os tin mikroteri,tote an afti einai thetiki apofevgetai i
%makroskelis diadikasia kai elegxetai an iparxi mikroteri timi i opia taftoxrona na einai
% kai thetiki, opote afto einai kai to krisimo fortio. Tora an i proti timi einai arnitiki tote oso i
%mikroteri idiotimi einai arnitiki pou den einai apodekti kai oso o deiktis prospelasis
% einai mikoteros apo tis diastaseis tou mitroou idiotimon ektelitali enas vroxos epanalipsis gia
%na vrethi an iparxi i proti thetiki idiotimi. Meta elegxetai i minimum idiotimi,
% dld to minlamda, an einai arnitiko simeni oti den vrethike thetiki idiotimi ara den iparxi krisimo
%fortio, opote me tin entoli error termtizetai to programa xoris na ektelitali kati alo,
% ,an omos exi vrethi thetiki idiotimi tote stamatai o vroxos kai kratiete i thesi pou
%vrethike i idiotimi,outos oste apo ki kai epita na psaxti to krisimo fortio,na min prospelastun pali
% stoixeia ta opia einai arnitika kai den apoteloun pithanes lisis,kai na vrethi kapia thetiki
%timi pou einai kai mikroteri.

```

```

fprintf('\n\parksi orthon kai ISOS diatmitikon taseon\n');

```

```

minlamda=lamda(1);
if (minlamda<=0)
    indexi=2;
    while (indexi<=(I*J) & minlamda<=0)
        if (lamda(indexi)>0)
            minlamda=lamda(indexi);
            ThesiProtouThetikou=indexi;
        end
        indexi=indexi+1;
    end
    if (minlamda<=0)
        error('Den vrethike kamia thetiki idiotimi!!! To programa tha termatisi!');
    else

        for indexi=(ThesiProtouThetikou+1):(I*J)
            if (lamda(indexi)>0 & lamda(indexi)<minlamda)
                minlamda=lamda(indexi);
            end
        end
    end
end
end

```

```

else
    for indexi=2:(I*J)
        if (lamda(indexi)>0 & lamda(indexi)<minlamda)
            minlamda=lamda(indexi);
        end
    end
end

end

end

KrisimoFortio(arithmosSindiasmour)=minlamda; % krisimo fortio einai i mikroteri apodekti
%timi tou mitroou idiotimon

%fprintf('\n\nTo krisimo fortio pou antistixi stin elaxisti idiotimi einai KrisimoFortio = lamdacr =
%min(lamda(i,j)) = %f kN/m',KrisimoFortio);

fprintf('\n\nGia Lx=%f kai Ly=%f kai fortia Nx0=%f kai Nxy0=%f :\n\nTo krisimo fortio pou
antistixi stin elaxisti idiotimi einai KrisimoFortio = lamdacr = min(lamda(i,j)) = %f
kN/m',Lx,Ly,Nx0,Nxy0,KrisimoFortio(arithmosSindiasmour));

end

% kano formatted output gia na tiposo ta simia ton dio aksonon dipla-dipla

N0cr=KrisimoFortio(1);
T0cr=KrisimoFortio(2);

fprintf('\n\nN0cr=%f kai T0cr=%f\n\n',N0cr,T0cr);
indexi=0;
for logosN=1:-0.25:0

```



```

    indexi=indexi+1;
    Ncr(indexi)=logosN*N0cr;
    Tcr(indexi)=T0cr*(1-(Ncr(indexi)/N0cr)^1)^(1/2);
    simiaN(indexi)=Ncr(indexi)/N0cr;
    simiaT(indexi)=Tcr(indexi)/T0cr;
end

string1='simiaN';
string2='simiaT';

fprintf('\n%10s',string1);
for indexi=1:length(simiaN)
    fprintf('\n%10.4f',simiaN(indexi));
end

fprintf('\n%10s',string2);
for indexi=1:length(simiaT)
    fprintf('\n%10.4f',simiaT(indexi));
end

fprintf('\n\n%10s %10s',string1,string2);
for indexi=1:length(simiaN)
    fprintf('\n%10.4f %10.4f',simiaN(indexi),simiaT(indexi));
end

subplot(3,1,CurrentSubplot);
    plot(simiaT,simiaN);

xlabel('T/Tcr0');
ylabel('N/Ncr0');
if(CurrentSubplot==1)
    title('Lx=0.50 kai Ly=0.50');
elseif(CurrentSubplot==2)
    title('Lx=0.50 kai Ly=0.75');
else

```

```
title('Lx=0.50 kai Ly=1.00');  
end
```

```
xlim([0 1.2]); % times pou tha fainontai ston x aksona  
ylim([0 1.2]); % times pou tha fainontai ston y aksona
```

```
end
```

```
%diary off;
```

## 2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΤΑ Χ ΚΑΙ Υ ΣΤΟ ΦΟΡΕΑ

```
clear all;  
clc;  
format long;
```

```
% % stiffness elements of Table 3.7 page 84
```

```
% D11=45.30; % N*m
```

```
% D22=25.26; % N*m
```

```
% D12=19.52; % N*m
```

```
% D66=20.62; % N*m
```

```
% % for orthotropic plates we have D16=D26=0 , Table 3.4 page 76 kollar
```

```
% D16=0; % D16=0
```

```
% D26=0; % D26=0
```

```
% The D matrix of the frp with thickness h=2mm , D2mm , is given in page 84 of Kollar-  
%Springer
```

```
%D=[45.3 19.52 0;19.52 25.26 0;0 0 20.62]; % paradima sel 115 kollar
```

```
%D=[99.25 1.94 0;1.94 6.47 0;0 0 3.03]; % O20
```

```
%D=[45.30 19.52 4.45;19.52 25.26 4.45;4.45 4.45 20.62]; % 45 2
```

```
%D=[65.42 16.29 -18.93;16.29 11.60 -7.74;-18.93 -7.74 17.39]; % -3004
```

```
%D=[34.61 4.58 3.3;4.58 12.34 3.34;3.34 3.34 5.14]; % O2452
```

```
D=[34.84 22.93 21.71;22.93 28.90 21.71;21.71 21.71 24.02]; % 45604
```

```
% for thickness h=4mm the matrix D has to be multiplied by  $2^3 = 8$ 
```

```
D=8*D;
```

```
D11=D(1,1); % N*m
```

```
D22=D(2,2); % N*m
```

```
D12=D(1,2); % N*m
```

```
D66=D(3,3); % N*m
```

```
D16=D(1,3); % N*m
```

```
D26=D(2,3); % N*m
```

```
I=6; % o pinakas G einai diastaseon I*J
```

```
J=6; % o pinakas G einai diastaseon I*J
```

```
G=zeros(I,J);
A=zeros(I,J);
b=zeros(I,J);
r=zeros(I,J);
ly=zeros(1,9);
KrisimoFortio=zeros(1,9);
```

```
ly(1)=0.2;
for indexi=2:9
    ly(indexi)=ly(indexi-1)+0.1;
end
```

```
Ny0=1;
Nxy0=0;
Nx0=1;
```

```
% NA ALLAZO Lx ME Ly GIA NA PERNO POS METAVALLETAI TO KRISIMO FORTIO ME
%ALLAGI KATA TIN ALLI DIEFTHINSI!!!!!!!!!!
```

```
Lx=0.5;
```

```
for epanalipsi=1:9
    Ly=ly(epanalipsi);
```

```
% ypologismos mitroou rij apo Table 4.1 selida 102 vivliou kollar
```

```
for indexi=1:(I*J)
    for indexj=1:(I*J)
        if mod(indexj-indexi,2)==0
            r(indexi,indexj)=0;
        else
            r(indexi,indexj)=1/pi*(2*indexi/(indexi^2-indexj^2));
        end
    end
end
```

```
%          fprintf('\n\nTo mitroo r[] einai:\n\n');
%          disp(r);
%
```

% dimiourgia kai arxikopiisi pinaka G[] diastaseon I\*J kai emfanisi tou stin othoni

```
%          for indexi=1:(I*J)
%      for indexj=1:(I*J)
%          G(indexi,indexj)=0;
%      end
%          end

          %fprintf('\n\nO pinakas G[] exei midenika stoixeia :\n\nG =\n\n');
          %disp(G);
%      fprintf('\n\nTo mitroo G[] einai diastaseon:\n\n');
%      sizeofG=size(G)
%
```

% ypologismos stoixion pinaka G[] apo Table 4.1 selida 102 vivliou kollar

fores=0; % arithmos vroxou pou ekteleitai ston pio kato kodika me ta tessera for

for indexi=1:I

for indexj=1:J

k=(indexi-1)\*J+indexj;

for m=1:I

for n=1:J

fores=fores+1;

%fprintf('\nEPANALHPSI NO:%d\n',fores);

l=(m-1)\*J+n;

% to delta\_lk apo pinaka sel.102 tou kollar

if k==l

delta=1;

else

delta=0;

end

% G1,G2,G3 voithitikes metavlites oi opies prostithentai gia na dosun to stixio G(i,j) , den  
% xrisimevun alou , einai mono gia aplopiisi tis sxesis pou dini to G(k,l)

$$G1 = 1/4 * Lx * Ly * \pi^4 * (D11 * (indexi/Lx)^4 + 2 * (D12 + 2 * D66) * (indexi/Lx)^2 * (indexj/Ly)^2 + D22 * (indexj/Ly)^4) * \delta;$$

```

G2=(-
2)*Lx*Ly*(pi^4)*D16*(((indexi/Lx)^2)*(m/Lx)*(n/Ly)*r(indexi,m)*r(indexj,n)+((m/Lx)^2)*(i
ndexi/Lx)*(indexj/Ly)*r(m,indexi)*r(n,indexj));
G3=(-
2)*Lx*Ly*(pi^4)*D26*((indexj/Ly)^2*(m/Lx)*(n/Ly)*r(indexi,m)*r(indexj,n)+(n/Ly)^2*(ind
exi/Lx)*(indexj/Ly)*r(m,indexi)*r(n,indexj));
G(k,l)=G1+G2+G3;

```

% b1,b2 voithitikes metavlites oi opies prostithenta gia na dosun to stixio b(i,j) , den  
% xrisimevun alou , einai mono gia aplopiisi tis sxesis pou dini to b(k,l) sti selida 114

```

b1=1/4*Lx*Ly*pi^2*(Nx0*(indexi/Lx)^2+Ny0*(indexj/Ly)^2)*delta;

```

```

b2=Lx*Ly*pi^2*Nxy0*((indexi/Lx)*(n/Ly)*r(m,indexi)*r(indexj,n)+(indexj/Ly)*(m/Lx)*r(ind
exi,m)*r(n,indexj));

```

```

b(k,l)=b1+b2;
%          fprintf('b(%d,%d)=%f',k,l,b(k,l));
%
%          fprintf('\ntelos %dtis epanalipsis\n\n',fores);
end
end
end
end

```

```

fprintf('arithmos ektelesmenon vroxon = sinolikos arithmos epanalipseon =
%d\n\n',fores);

```

```

%          fprintf('\n\nO pinakas G[] telika einai:\n\nG =\n\n');
%          disp(G);
%
%          fprintf('\n\nO pinakas b[] telika einai:\n\nb =\n\n');
%          disp(b);
%
%          % euresi antistrofou pinaka tou b[] , inverse matrix , kai emfanisi tou stin othoni
%          fprintf('\n\nO antistrofos pinakas tou b einai b^(-1) :\n\nbInverse =\n\n');
%          bInverse=inv(b);
%          disp(bInverse);
%
%          % euresi tou pinaka bInverse[]*G[] kai emfanisi tou stin othoni
%          fprintf('\n\nTo zitoumeno mitroo A=bInverse[]*G[] einai :\n\nA =\n\n');
%          A=bInverse*G;
%          disp(A);

```

```

% idiotimes(eigenvalues) tou pinaka A=blInverse*G me tin entoli eig(A)
%fprintf('\n\nOi idiotimes tou pinaka A=blInverse*G einai :\n\neigenvaluesA =\n\n');
    eigenvaluesA=eig(A); % se N/m
%disp(eigenvaluesA);

    fprintf('\n\nGia na exo to apotelesma se kN/m exo oti lamda =\n\n');
    lamda=10^(-3)*eigenvaluesA;
%    disp(lamda);

string3='IDIOTIMES';

fprintf('\n%25s',string3);
for indexi=1:length(lamda)
    fprintf('\n%25.6f',lamda(indexi));
end

% euresi krisimou fortiou meso euresis elaxistis idiotimis tou mitroou lamda

if (Nx0==0 & Ny0==0)

% An Nx0==0 & Ny0==0 tote exo mono Nxy0, ara exo kathari diatmisi , tote exo kai
%arnitikes idiotimes,afes simvolizun tin antitheti katefthinsi apo tin askisi tou fortiou,
% dld ligismo stin ali katefthinsi, to krisimo fortio tote einai to kata apoliti timi mikrotero.
% Tote ston pinaka lamda pou exo tis idiotimes tou provlimatos, oses einai arnitikes tis
%kano thetikis kai gia tin evresi tis mikroteris thetikis pleon akoloutho tin gnosti
%diadikasia

    fprintf('\n\nKathari Diatmisi-Mono Diatmitikes Taseis\n\n');

    for indexi=1:(I*J)
        if lamda(indexi)<0
            lamda(indexi)=lamda(indexi)*(-1);
        end
    end

    minlamda=lamda(1);
    for indexi=2:(I*J)
        if (lamda(indexi)<minlamda)
            minlamda=lamda(indexi);
        end
    end

    else

```

```
% Afou exo oposdipote orthes taseis, mpori na exo sindiasmo me diatmitikes ala mpori
%kai oxi, tote den mporo na dextho arnitikes idiotimes giati den exoun noima, afou se
%periptosi
% antithetis katefthinsis ton askoumenon dinameon den exo pia thlipsi ala efelkismo.
%Opote metaksi ton thetikon idiotimon mono tha psakso tin mikroteri!!!! kai oxi genikos
%tin
% kata apoliti timi mikroteri i opia mpori na einai kai arnitiki!!! Vevea otan exo mono
%orthes taseis kai katholou diatmitikes oi idiotimes einai aparetita thetikos
```

```
% Tropos evresis : theto tin proti timi os tin mikroteri,tote an afti einai thetiki apofevgetai
%i makroskelis diadikasia kai elegxetai an iparxi mikroteri timi i opia taftoxrona na einai
% kai thetiki, opote afto einai kai to krisimo fortio. Tora an i proti timi einai arnitiki tote
oso i mikroteri idiotimi einai arnitiki pou den einai apodekti kai oso o deiktis prospelasis
% einai mikoteros apo tis diastaseis tou mitroou idiotimon ektelitai enas vroxos
epanalipsis gia na vrethi an iparxi i proti thetiki idiotimi. Meta elegxetai i minimum
%idiotimi,
% dld to minlamda, an einai arnitiko simeni oti den vrethike thetiki idiotimi ara den iparxi
%krisimo fortio, opote me tin entoli error termtizetai to programa xoris na ektelitai kati
%alo,
%,an omos exi vrethi thetiki idiotimi tote stamatai o vroxos kai kratiete i thesi pou
%vrethike i idiotimi,outos oste apo ki kai epita na psaxti to krisimo fortio,na min
%prospelastun pali
% stoixeia ta opia einai arnitika kai den apoteloun pithanes lisis,kai na vrethi kapia thetiki
%timi pou einai kai mikroteri.
```

```
fprintf('\nIparksi orthon kai ISOS diatmitikon taseon\n');
```

```
minlamda=lamda(1);
if (minlamda<=0)
    indexi=2;
    while (indexi<=(I*J) & minlamda<=0)
        if (lamda(indexi)>0)
            minlamda=lamda(indexi);
            ThesiProtouThetikou=indexi;
        end
        indexi=indexi+1;
    end
    if (minlamda<=0)
        error('Den vrethike kamia thetiki idiotimi!!! To programa tha termatisi!');
    else

        for indexi=(ThesiProtouThetikou+1):(I*J)
            if (lamda(indexi)>0 & lamda(indexi)<minlamda)
                minlamda=lamda(indexi);
            end
```



```

        end
    end

    else
        for indexi=2:(I*J)
            if (lamda(indexi)>0 & lamda(indexi)<minlamda)
                minlamda=lamda(indexi);
            end
        end
    end

end

end

KrisimoFortio(epanalipsi)=minlamda; % krisimo fortio einai i mikroteri apodekti timi
%tou mitroou idiotimon

    %fprintf('\n\nTo krisimo fortio pou antistixi stin elaxisti idiotimi einai KrisimoFortio =
    %lamdacr = min(lamda(i,j)) = %f kN/m',KrisimoFortio);
    fprintf('\n\nGia Lx=%f kai Ly=%f kai fortia Nx0=%f kai Nxy0=%f :\n\nTo krisimo fortio
    pou antistixi stin elaxisti idiotimi einai KrisimoFortio = lamdacr = min(lamda(i,j)) = %f
    kN/m',Lx,Ly,Nx0,Nxy0,KrisimoFortio(epanalipsi));

end

fprintf('\n\n%20s','ly');
for indexi=1:length(ly)
    fprintf('\n\n%20.6f',ly(indexi));
end

fprintf('\n\n%20s','Krisimo Fortio');
for indexi=1:length(KrisimoFortio)
    fprintf('\n\n%20.6f',KrisimoFortio(indexi));
end

figure;
plot(ly,KrisimoFortio);
%ylim([0 80]); % times pou tha fainontai ston y aksona

```